

## Инварианты. Зелёные.

### Вступление

В задачах этого листочка нужно найти **инвариант** — то, что сохраняется при каких-то действиях. Инвариантом может быть чётность (или остаток от деления на какое-то другое число), цвет клетки, на которой стоит фигура, сумма всех чисел и многое другое.

**1**      **a** На столе стоят 5 стаканов. Из них 4 стакана стоят правильно, а центральный перевернут доннышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые три стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

**b** А если всего стаканов 7, правильно стоят все, кроме центрального, а за один ход разрешается переворачивать 4 стакана?

**2** На доске были записаны числа 1, 4 и 7. Ася складывала два записанных числа и вычитала из этой суммы треть, а результат записывала на доску вместо того числа, которое вычиталось. В какой-то момент на доске оказалось три числа, наименьшее из которых равно 1543. Найдите остальные числа.

### Задачи для самостоятельного решения

**1** Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть из левого нижнего угла доски  $100 \times 100$  в правый нижний?

**2**      **a** Разменный автомат меняет одну монету на три или пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 2022?

**b** Другой автомат может поменять одну монету на 4 или 7 монет. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 2022?

**3** Аня написала на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Каждую минуту она увеличивает какие-то два из них на единицу. Может ли Аня через некоторое время получить шесть равных чисел?

**4** В луже плавают 1543 синих и 2022 зелёных амёбы. Иногда две амёбы могут слиться в одну: две одноцветные амёбы сливаются в одну зелёную, а две разноцветные — в одну синюю. В конце концов в луже осталась одна амёба. Определите её цвет.

**5** В алфавите языка племени УАУ всего две буквы: У и А. При следующих заменах сочетаний букв значение слова не меняется: УАУ  $\leftrightarrow$  У, УУ  $\leftrightarrow$  АУУУА, ААУ  $\leftrightarrow$  УАА, А  $\leftrightarrow$  АУАУА. Можно ли утверждать, что слова УАА и АУУ являются синонимами?

**6** На доске написаны натуральные числа:      **a** от 1 до 2022;      **b** от 1 до 1543. Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать их разность (из большего вычитаем меньшее). Можно ли за несколько операций добиться того, чтобы на доске остались только нули?

## Инварианты. Зелёные. Добавка.

**7** Петя записал на компьютере число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

**8** В каждой из клеток таблицы стоит либо плюс, либо минус. За ход разрешается заменить в одной строке или одном столбце все знаки на противоположные. Можно ли получить таблицу из одних плюсов из следующих таблиц?

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| + | + | + | + |
| + | + | - | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |

a)

|   |   |   |
|---|---|---|
| - | + | - |
| + | - | + |
| - | + | - |

b)

|   |   |   |
|---|---|---|
| + | + | + |
| + | - | + |
| + | + | + |

c)

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| - | + | + | - |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
| - | + | + | - |

d)

**9** Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49 камней, в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из чётного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

**10** На столе лежит кучка из 1543 орехов. За ход можно съесть орех из любой кучки и разделить её на две кучки (не обязательно равных). Можно ли за несколько ходов оставить на столе только кучки по 4 ореха?