Математический кружок 6 класса в школе 1543.

В поисках липы. Зелёные.

В этом листочке вместе с задачами даны и их решения, только, к сожалению, неверные.

[a] Найдите все ошибки в этих решениях.

[b] Оцените, насколько сильно ошибки «портят» решение. Исправьте их или предложите другое (верное) решение.

[1] Некий торговец купил товар за 1 рубль, потом продал его за 2 рубля, потом купил его за 3 и продал за 4, и так далее, последний раз купил за 99 рублей, а продал за 100. Какую прибыль он в итоге получил?

Решение: Купив товар за рубль, а продав за 2, торговец приобрёл 1 рубль. Но, купив после этого этот же товар за 3 рубля, он потерял 1 рубль. Рассуждая далее аналогично, приходим к тому, что его прибыль образовалась только от последней продажи и составляет 1 рубль.

[2] Дата 22.02.2022 читается одинаково слева направо и справа налево. Сколько всего таких дат в XXI веке? (Дата записывается в формате ДД.ММ.ГГГГ.)

Решение: Первые две цифры года в XXI веке не меняются, меняются только последние две. Поэтому месяц определён, а может меняться только число. Но число принимает значения от 01 до 31, значит, будет 31 такая дата.

[3] Дана клетчатая доска размером 4×4 с шахматной раскраской. За один шаг можно выбрать на этой доске произвольный квадрат размером 2×2 и изменить цвет каждой его клетки на противоположный. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?

Решение: Нельзя. Заметим, что при перекрашивании любого квадрата 2×2 в любой строке доски остаются две белые и две чёрные клетки. Следовательно, все клетки не могут оказаться одного цвета.

[4] На острове живут рыцари и лжецы. Как-то за круглым столом собралось 12 островитян. Каждый их них сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Сколько лжецов было за столом?

Решение: Все сидящие за столом не могли быть лжецами, так как тогда для каждого из них высказывание было бы верным. Значит, за столом был хотя бы один рыцарь. Его правый сосед — лжец, так как рыцарь сказал правду. Правый сосед лжеца — рыцарь, так как лжец солгал. Правый сосед этого рыцаря — лжец, и так далее. Таким образом, рыцари и лжецы сидят через одного, следовательно, лжецов было 6.

[5] Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

Решение: Поскольку требуется туз, сначала выберем его. Это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^{9} Так как оба выбора происходят независимо, искомое количество способов равно $4C_{51}^{9}$.

$\boxed{6}$ Сумма трёх натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение?

Ответ: на 5 нулей. Пример: $400+100+20=520$, $400\cdot100\cdot20=800000$.

Оценка: Посмотрим, сколько пятёрок может быть в разложении произведения на простые множители. Все слагаемые не могут делиться на 25, так как сумма на 25 не делится. Если два слагаемых делятся на 25, то третье даст в разложении не более чем одну пятёрку, поэтому всего в разложении будет не больше пяти пятёрок. Значит, и нулей не более пяти.

$\boxed{7}$ Сколькими способами можно нарисовать прямоугольник по линиям сетки на клетчатом листе бумаги размером 15×43?

Решение: Каждый прямоугольник задаётся однозначно своими верхней левой и правой нижней вершинами. Выберем одну вершину — это можно сделать $16\cdot44$ способами — столько узлов решётки на листе размером 15×43. Второй узел не должен лежать с первым в одной строке и в одном столбце (а также не должен с ним совпадать). Таким образом, он может лежать в любой из 15 оставшихся строк и в любом из 43 оставшихся столбцов, то есть может быть выбран $15\cdot43$ способами.

Итого по правилу произведения существует $16\cdot44\cdot15\cdot43$ способов выбрать две вершины прямоугольника. Но при этом мы посчитали каждый прямоугольник два раза: выбирая сначала верхний левый, а затем нижний правый угол и наоборот, поэтому полученное произведение надо разделить на 2. Итого получается $(16\cdot44\cdot15\cdot43)/2$ способов.

$\boxed{8}$ В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.

Решение: Разделим депутатов на две палаты произвольным образом. Назовём депутатов, у которых 2 или 3 врага внутри палаты, *злыми*, а остальных *добрыми*. Если все депутаты добрые, то задача решена. Если нет — переведем какого-нибудь злого депутата в другую палату. Там у него не больше одного врага, значит он подобреет. Будем продолжать переводить злых депутатов в другую палату до тех пор, пока они все не подобреют. Так мы получим требуемое разделение.

$\boxed{9}$ Прибор «РИВ-6» умеет из шести предметов различного веса выбирать два средних по весу. Ире принесли 7 драгоценных камней разного веса. За какое минимальное число применений прибора она гарантированно сможет найти средний по весу камень?

Ответ: за 5. Алгоритм: Ясно, что если упорядочить камни по весу, то при любом испытании прибор выберет два из трёх средних камней. Удалив один камень из показанных в первом испытании, узнаем остальные два средних. Теперь три раза удаляем камни не из этой тройки. Тот камень, который войдёт в каждую из трёх пар, — самый средний.

Оценка: Четырёх испытаний недостаточно. Обозначим камни в порядке возрастания весов A, B, C, D, E, F, G. Рассмотрим случай, когда при первом испытании мы не взяли камень D. При остальных трёх испытаниях у нас может получиться два принципиально разных случая: все результаты одинаковы (например, C и D), или есть различные результаты (например, два раза C и D, один раз D и E). В обоих случаях средним может оказаться как C, так и D.