Математический кружок 6 класса в школе 1543.

Одинаковые задачи. Зелёные.

0 Раньше в автобусах использовались билеты с шестизначными номерами (от 000000 до 999999). Посмотрим на следующие задачи:

a Сколько существует номеров, в которых сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних?

b Сколько существует номеров, в которых сумма цифр на чётных позициях равна сумме цифр на нечётных позициях?

c Сколько существует номеров с суммой цифр 27?

Оказывается, что с точки зрения математики эти три задачи практически одинаковы. Попробуйте объяснить, почему.

Задачи для самостоятельного решения

1 Найдите «лишнюю» задачу (решать не обязательно).

a В школе учится 275 человек. Докажите, что у каких-то 23 из них день рождения в один месяц.

b Можно ли разложить 275 шариков на 23 кучки так, чтобы количество шариков во всех кучках было различным?

c В ящике лежат 275 цветных карандашей. Докажите, что среди них обязательно найдётся либо 23 карандаша одного цвета, либо 13 карандашей разных цветов.

d В магазин привезли 275 яблок 12 разных сортов. Обязательно ли среди них найдётся 23 яблока одного сорта?

2 Не решая задач, разбейте их на группы «одинаковых». Объясните, как установить соответствие между задачами одной группы.

a Сколькими способами можно поставить на доску 6×6 шесть ладей?

b Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?

c Сколькими способами можно на доске 36×36 расставить 36 ладей, не бьющих друг друга?

d У деда Мороза есть 30 машинок и 6 пистолетов. Сколько существует способов отправить по подарку 36 ребятам?

e Сколькими способами можно расставить на доске 6×6 числа от 1 до 36?

f Сколько существует способов раскраски доски 6×6 в 6 цветов?

g На окружности отметили 36 точек. Сколько существует шестиугольников с вершинами в этих точках?

h В новогоднем алфавите есть все буквы, чтобы можно было составить слово ПОДАРОК (а других букв нет). Сколько различных новогодних заклинаний длины 36 можно составить в Новый год (любая последовательность букв в новый год считается заклинанием)?

i Есть 36 разных конфет. Сколькими способами их можно раздать 36 детям (по одной конфете каждому ребенку)?

Одинаковые задачи. Зелёные.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Придумайте задачи, которые можно решить при помощи следующих рассуждений:

$\boxed{\text{a}}$ По лемме о рукопожатиях, сумма всех степеней вершин в графе не может равняться нечётному числу $5 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = 59$. Поэтому в этом графе есть по крайней мере одна вершина степени 1.

$\boxed{\text{b}}$ Посчитаем число рёбер в двудольном графе двумя способами. С одной стороны, их $6 \cdot 7 + 2 = 44$, а с другой — $4 \cdot$ (количество вершин во второй доле). Поэтому во второй доле $44 : 4 = 11$ вершин.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Объясните, почему следующие задачи являются одинаковыми:

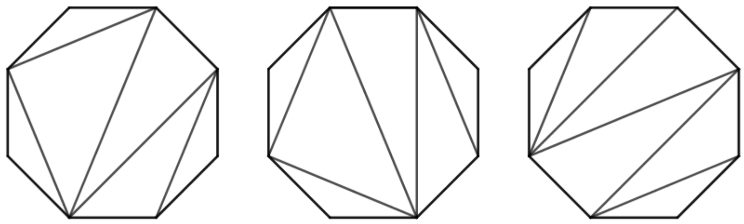
$\boxed{\text{a}}$ Сколькими способами можно порезать доску 2×15 на доминошки 1×2?

$\boxed{\text{b}}$ На прямой отмечены точки A и B, расстояние между которыми равно 150 см. Сколькими способами кузнечик может пропрыгать из A в B, если он умеет прыгать только на 10 см и на 20 см? (Кузнечик прыгает только вдоль прямой, по направлению от A к B.)

$\boxed{\text{c}}$ Сколько существует слов длины 14 из букв А и Б, не содержащих двух букв Б подряд?

$\boxed{\mathbf{5}}$ (СУПЕРЗАДАЧА)

- Маша рисует правильные 8-угольники и режет их непересекающимися диагоналями на 6 треугольников всеми возможными способами (три каких-то способа нарисованы на картинке снизу).



- Миша написал выражение $1+2+3+4+5+6+7$ и расставляет в нём 5 пар скобок всеми возможными способами (три каких-то способа написаны снизу).

$$(((((1+2)+3)+4)+5)+6)+7$$

$$((1+2)+(3+(4+5)))+(6+7)$$

$$(1+(2+3))+((4+5)+(6+7))$$

Докажите, что у Маши и Миши получится поровну объектов.