

Разнойой. Зелёные.

1 Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков во всех кучках было различным?

2 На 99 карточках пишут числа $1, 2, \dots, 99$, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа $1, 2, \dots, 99$ (в любом порядке). Дальше складывают числа на каждой карточке и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.

3 Можно ли выписать в строку 70 чисел так, чтобы сумма любых 7 идущих подряд чисел была больше 90, а сумма любых 10 идущих подряд чисел — меньше 120?

4 **a** Среди трёхзначных чисел, у которых все цифры не кратны трём, каких больше: тех, где цифры идут строго по возрастанию, или тех, где цифры идут строго по убыванию?

b Среди трёхзначных чисел, кратных трём, каких больше и на сколько: тех, где цифры идут строго по возрастанию, или тех, где цифры идут строго по убыванию?

5 На доске написали все натуральные числа от 1 до 20. Часть чисел стерли так, что разность любых двух оставшихся не равна 4 или 5. Какое наибольшее количество чисел могло остаться?

6 Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

7 Докажите, что среди чисел, меньших 10000, чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 21 поровну.

8 У каждого марсианина три руки и несколько антенн. Несколько марсиан взялись за руки так, что все руки оказались заняты. При это оказалось, что количество антенн у любых двух взявшихся за руки марсиан отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное число антенн у марсиан быть равно 2022?

9 На доске написано число 123456789. С ним проделывается следующая операция. У написанного числа выбираются две соседние цифры. Если ни одна из них не равна нулю, из каждой вычитается по единице, и выбранные цифры меняются местами (например, $123456789 \rightarrow 123436789$). Какое наименьшее число могло быть получено в результате таких операций?

10 В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

11 Из чисел $1, 2, \dots, 2022$ выбрали 1012 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдется два, одно из которых делится на другое.