

Двудольные графы. Зелёные.

Вступление

Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на две группы (доли) так, что все рёбра соединяют вершины из разных долей.

1 В школьной столовой продается первое, второе и десерт. Обслуживая учеников 6А класса, повар заметил, что каждый из них взял либо 1, либо все 3 блюда, а каждое блюдо взяло нечётное число учеников. Докажите, что кто-то из 30 учеников 6А вообще не пообедал.

2 Докажите, что в двудольном графе нет циклов нечётной длины.

Задачи для самостоятельного решения

1 Докажите, что граф двудольный тогда и только тогда, когда его вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы у любого ребра концы были разноцветные.

Доказательство любого утверждения вида «А тогда и только тогда, когда В» состоит из двух частей: сначала вы доказываете, что если верно А, то верно В, а потом в обратную сторону — что из В следует А.

2 В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?

3 Можно ли поставить на бесконечную клетчатую доску 25 коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других?

4 20 школьников решали 20 задач. Каждый решил ровно две задачи, и каждую задачу решили ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет одну из решённых им задач и все задачи будут рассказаны.

5 У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

6 Восемь школьников решали восемь задач. Оказалось, что каждую задачу решили пять школьников. Докажите, что найдутся такие два школьника, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

7 Являются ли деревья двудольными графами?

8 В графе нет циклов нечётной длины. Докажите, что этот граф двудольный.

9 Аня нарисовала на доске какой-то связный граф с 2022 вершинами и пронумеровала его вершины числами $1, 2, \dots, 2022$ в каком-то порядке. Затем она написала на каждом ребре сумму номеров в его концах, а номера в вершинах стёрла. Оказалось, что однозначно восстановить эти номера по суммам на рёбрах невозможно.

а Докажите, что Анин граф двудольный.

б (СУПЕР) Докажите, что в каждой из долей графа по 1011 вершин.