

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Деревья. Зелёные.

Снег падал, падал и упал,
На юг деревья улетели...

Игорь Иртенъев

Вступление

Связным называется граф, в котором можно добраться по рёбрам от любой вершины до любой другой.

Путь в графе — это последовательность вершин, соединённых рёбрами. Путь называется **простым**, если вершины в нём не повторяются.

Цикл — это замкнутый путь, вершины в котором не повторяются.

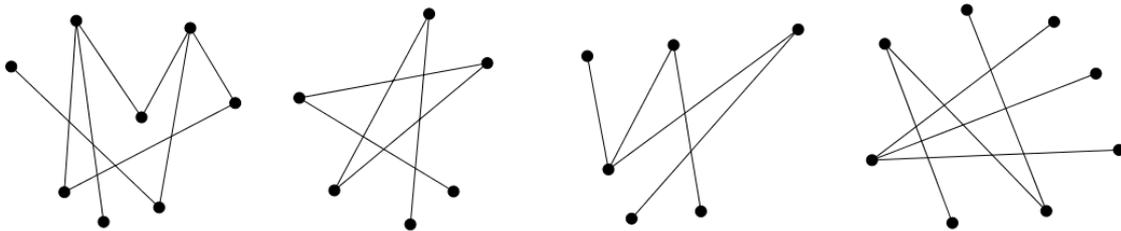
Дерево — это связный граф, в котором нет циклов.

1 **а** В графе любые две вершины соединены ровно одним простым путём. Докажите, что этот граф — дерево.

б Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путём.

Задачи для самостоятельного решения

1 На каких картинках изображены деревья?



2 Паша нарисовал на доске какое-то дерево. Хулиган Витя стёр в нём одно из рёбер. Докажите, что от этого дерево развалилось на два отдельных куска (они называются **компонентами связности**).

3 На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 5 коробочек. В некоторых из них лежит по пять коробочек, в некоторых из них тоже лежит по пять коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 25. Сколько всего коробочек?

4 У царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

5 **а** В стране есть несколько (больше одного) городов, соединённых дорогами. Из каждого города можно попасть в любой другой, причём по единственному маршруту. В поход по дорогам этой страны отправился турист, который не хочет дважды ходить по одной и той же дороге. Докажите, что ни в одном городе он не побывает дважды.

б Докажите, что рано или поздно туристу придётся остановиться, причём это случится в «тупике» — городе, из которого выходит только одна дорога.

в Докажите, что в этой стране по крайней мере два города-«тупика».

Деревья. Зелёные. Добавка.

Вершина графа, из которой выходит только одно ребро, называется **висячей**. Висячую вершину в дереве иногда называют **листом**.

Теорема (мы доказали ее в 5 задаче): В любом дереве (кроме дерева-точки с одной вершиной) есть хотя бы два листа.

6 **a** В дереве стерли один из листов вместе с ведущим в него ребром. Докажите, что оставшийся граф по-прежнему является деревом.

b Докажите, что число рёбер в дереве на единицу меньше, чем число вершин.

7 Из веревочек связали сетку в виде прямоугольника 7×10 . Какое максимальное число разрезов можно сделать, чтобы сетка не распалась на куски?

8 **a** На доске нарисовали какой-то связный граф. Докажите, что в нём можно стереть несколько рёбер так, чтобы получилось дерево.

b Докажите, что в связном графе с n вершинами не меньше $n - 1$ ребра.

9 В графе степени всех вершин равны 5. Его рёбра покрасили в три цвета так, что по рёбрам каждого цвета можно пройти от любой вершины до любой. Сколько вершин может быть в этом графе?

Суперзадача

1 *Расстоянием* между двумя произвольными вершинами дерева будем называть длину простого пути, соединяющего их. *Удалённостью* вершины дерева назовём сумму расстояний от неё до всех остальных вершин. В дереве есть две вершины с удалённостями, отличающимися на 1. Докажите, что в нём нечётное число вершин.

