

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Вспоминаем графы. Зелёные.

Вступление

1 На день рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Покажите, как восьмерых ребят можно рассадить за круглый стол, чтобы у любых двух, сидящих рядом, в именах встречались одинаковые буквы.

2 Собрались как-то 5 четырёхруких инопланетянина и 7 пятируких инопланетян. Смогут ли они взяться за руки так, чтобы свободных рук не осталось?

Задачи для самостоятельного решения

1 В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

2 Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 13 островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

3 Можно ли нарисовать на плоскости 11 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 5 других?

4 В классе стоят компьютеры, пронумерованные числами $1, 2, \dots, 99$. Если сумма всех цифр в номерах двух компьютеров делится на 3, то эти компьютеры соединены проводом. (Например, между компьютерами 4 и 23 есть провод, поскольку $4 + 2 + 3 = 9$ делится на 3. А между компьютерами 17 и 26 провода нет, поскольку $1 + 7 + 2 + 6 = 16$ на 3 не делится.) Можно ли по проводам передать файл с компьютера 15 на компьютер 43 (возможно, через промежуточные компьютеры)?

5 Можно ли обойти (побывать в каждой клетке по одному разу и вернуться назад) шахматным конём а) доску 4×4 ; б) доску 4×4 без угловых клеток?

Вспоминаем графы. Зелёные. Добавка.

6 Несколько фишек двух цветов расположены в ряд, причём встречаются оба цвета. Известно, что любые две фишки, между которыми есть 2 или 3 фишки, одного цвета. Какое наибольшее число фишек может быть?

7 В стране 2021 город. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно выбрать одну из этих авиакомпаний так, что из любого города можно будет попасть в любой другой, пользуясь только рейсами этой авиакомпании.

8 В некотором городе на каждом перекрёстке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрёстке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

9 В некоторой необычной стране каждые два города соединены авиалинией, однако на каждой авиалинии самолёты летают только в одну сторону. Докажите, что существует город, из которого можно долететь до любого другого, сделав не более одной пересадки.

Суперзадача

1 Несколько Совершенно Секретных Объектов соединены подземной железной дорогой таким образом, что каждый Объект напрямую соединён не более чем с тремя другими и от каждого Объекта можно добраться под землей до любого другого, сделав не более одной пересадки. Каково максимальное число Совершенно Секретных Объектов?