

Математический кружок 6 класса в школе 1543.  
Двудольные графы. Синие

Письменное вступление (20 минут)

1 Царь Кощей чахнет над золотом. Когда он раскладывает свои монеты стопками по девять штук, у него остается восемь монет. Сколько монет может оставаться, когда он будет раскладывать монеты стопками по 18 штук?

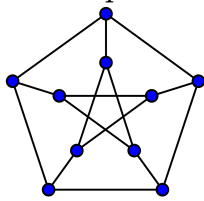
2 Какое наименьшее количество чисел надо взять, для того, чтобы среди них нашлось два, разность которых делится на 9.

3 \* Даны два натуральных числа  $a < b$ . Докажите, что из любых  $b$  последовательных натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых делится на  $ab$ .

Покраска графа

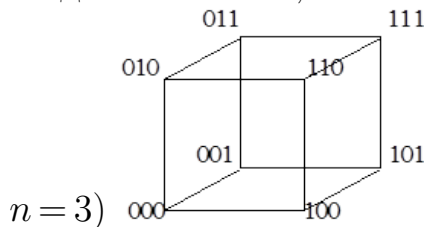
Покрасить неориентированный граф в  $n$  цветов означает выбрать цвет для каждой его вершины таким образом, чтобы никакие две вершины одного цвета не были бы соединены ребром.

1 Ниже нарисован граф Петерсона. В какое наименьшее число цветов его можно покрасить?



2 Из полного графа на  $n$  вершин выкинули  $n$  каких-то ребер. В какое наименьшее число цветов можно гарантированно покрасить получившийся граф?

3  $n$ -мерным булевым кубом называется неориентированный граф, вершинами которого являются слова длины  $n$ , состоящие только из 0 и 1, а ребра соединяют слова, отличающиеся ровно в одной позиции. (Ниже картинка для



a) Сколько вершин в  $n$ -мерном булевом кубе? Какая степень каждой?

b) Докажите, что  $n$ -мерный булевый куб можно покрасить в два цвета.

4 Докажите, что связный граф без циклов всегда можно покрасить в два цвета. Сколько у него всего раскрасок в два цвета?

5 Граф содержит  $k$  компонент связности и красится в два цвета. Сколько существует различных раскрасок этого графа в два цвета?

6 Докажите, что граф можно покрасить в два цвета тогда и только тогда когда в нём нет цикла нечётной длины.

**7**     **a** Докажите, что первый 1000 натуральных чисел можно покрасить в два цвета так, что отношение любых двух одноцветных чисел не является простым числом.

**b** Та же задача, но взяли любые 1000 натуральных чисел.

**8** 8 школьников решало 8 задач. Известно, что каждую задачу решило 5 человек. Докажите, что найдутся такие 2 ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

**9** В графе 100 вершин, нет треугольников, степень каждой вершины больше 40. Доказать, что в этом графе нет циклов длины 5