

Непрерывность. Синие.

1 У Коли было число 1. Каждую секунду он делал одно из трёх действий: умножал число на одну из его цифр, прибавлял одну из цифр числа или вычитал одну из цифр числа. В какой-то момент у его числа было 1543 знака. Докажите, что и 100 знаков в какой-то момент тоже было.

2 В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают выходить замуж за не богатых женщин (то есть тех, у кого зарплата не больше, чем у премьер-министра). Докажите, что можно установить такую зарплату премьер-министру, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин при условии, что все зарплаты в стране различны.

3 На сороковой минуте матча «Спартак» выигрывал со счётом 2:1, а на восьмидесятой уже проигрывал 4:5. Обязательно ли был момент, когда счёт был ничейным?

4 Олег ежедневно получает не менее 9 писем и не более 10 смсок. За январь прошлого года писем пришло больше, чем смс, а за весь прошлый год в целом — наоборот. Докажите, что в прошлом году был день, в конце которого в количества писем и смс, пришедших с начала года, совпадали.

5 В ряд сидит 20 школьников – 10 мальчиков и 10 девочек. Докажите, что можно так выбрать 10 сидящих подряд, чтобы мальчиков и девочек было бы поровну?

6 В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары в этой последовательности — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

7 **а** Докажите, что найдётся 1543 последовательных числа, среди которых ровно 43 простых.

б Докажите, что эти 1543 числа можно выбрать так, чтобы первое из них делилось на 3.

8 В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два лебедя. Через час они поменялись местами. Докажите, что в какой-то момент расстояние между ними было ровно 100 метров.

9 Вася и Петя играют в следующую игру. На доске написаны два числа: $\frac{1}{2021}$ и $\frac{1}{2022}$. На каждом ходу Вася называет любое число x , а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на x . Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?