

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Деревья и Гамильтоновы циклы. Синие

Часть 1. Деревья

1] Есть волейбольная сетка 20×50 . Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?

2] Сколько рёбер может быть в графе без циклов на семи вершинах?

3] Какое наибольшее число вершин степени 4 может быть в графе на 1000 вершин?

4] Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

5] Дано дерево с $2n + 1$ вершиной. Докажите, что в нём можно выбрать как минимум $n + 1$ вершину так, чтобы никакие две выбранные вершины не были бы соединены ребром.

Часть 2. Гамильтоновы циклы

Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз. Гамильтонов путь определяется ровно так же, но теперь мы не требуем, чтобы первая и последняя вершина были бы соединены путём. Например граф Петерсона (расскажу, что это такое) имеет гамильтонов путь, но не имеет гамильтонова цикла

6] Докажите, что в двудольном графе с нечётным числом вершин не может быть гамильтонова цикла.

7] Пусть в некотором графе на n вершинах все вершины имеют степень больше, чем $\frac{n}{2}$.

a] Докажите, что в нём найдётся цикл длины больше, чем $\frac{n}{2}$.

b] Докажите, что в нём найдётся Гамильтонов цикл.

8] Придумайте граф, с достаточно большим числом вершин (например, больше 10), в котором степень каждой вершины больше $\frac{n}{3}$, но при этом нет гамильтонова цикла.

9] Все вершины графа имеют степень 3. Саша нашёл в этом графе гамильтонов цикл. Докажите, что Саша сможет найти ещё один гамильтонов цикл.

Циклы называются различными, если в одном есть ребро, которого нет в другом

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Деревья и Гамильтоновы циклы. Синие

Часть 1. Деревья

1] Есть волейбольная сетка 20×50 . Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?

2] Сколько рёбер может быть в графе без циклов на семи вершинах?

3] Какое наибольшее число вершин степени 4 может быть в графе на 1000 вершин?

4] Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

5] Дано дерево с $2n + 1$ вершиной. Докажите, что в нём можно выбрать как минимум $n + 1$ вершину так, чтобы никакие две выбранные вершины не были бы соединены ребром.

Часть 2. Гамильтоновы циклы

Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз. Гамильтонов путь определяется ровно так же, но теперь мы не требуем, чтобы первая и последняя вершина были бы соединены путём. Например граф Петерсона (расскажу, что это такое) имеет гамильтонов путь, но не имеет гамильтонова цикла

6] Докажите, что в двудольном графе с нечётным числом вершин не может быть гамильтонова цикла.

7] Пусть в некотором графе на n вершинах все вершины имеют степень больше, чем $\frac{n}{2}$.

a] Докажите, что в нём найдётся цикл длины больше, чем $\frac{n}{2}$.

b] Докажите, что в нём найдётся Гамильтонов цикл.

8] Придумайте граф, с достаточно большим числом вершин (например, больше 10), в котором степень каждой вершины больше $\frac{n}{3}$, но при этом нет гамильтонова цикла.

9] Все вершины графа имеют степень 3. Саша нашёл в этом графе гамильтонов цикл. Докажите, что Саша сможет найти ещё один гамильтонов цикл.

Циклы называются различными, если в одном есть ребро, которого нет в другом