

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Двудольные графы. Синие. Попытка 2

Вступление

Назовём двудольным графом граф, если его вершины можно разделить на две части (далее доли) так, что все рёбра идут из одной доли в другую (другими словами, нет рёбер идущих из одной доли в неё же)

1 Докажите, что граф двудольный тогда и только тогда когда его можно покрасить в два цвета.

Доказательство любого утверждения вида «А тогда и только тогда когда В» всегда можно разделить на две части - сначала вы доказываете, что если верно А, то верно В, а потом в обратную сторону - что из В следует А.

2 Докажите, что все пути, соединяющие две вершины одной доли имеют чётную длину.

3 В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?

4 Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый— с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

5 Пусть в графе нашёлся цикл нечётной длины. Может ли он быть двудольным?

6 Пусть в графе нет нечётных циклов и все вершины, кроме одной смогли разбить на две доли. Докажите, что оставшуюся можно положить в одну из двух долей, так чтобы граф продолжил быть двудольным.

a Если все вершины, даже если выкинуть эту одну лежат в одной компоненте связности (от любой можно попасть до любой)?

b В общем случае?

7 Докажите (а на самом деле, поймите, что всё доказано в предыдущей задаче), что граф двудольный, если в нём нет циклов нечётной длины

Для тех, кто дорешал до сюда, есть куча задач из конца предыдущего листка