

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Зайчики. Вспоминаем графы.

Вставайте граф, Вас ждут великие дела!

Вступление

1 В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?

2 **Лемма о рукопожатиях:** Докажите, что в любом графе число нечетных вершин четно.

Теперь сами

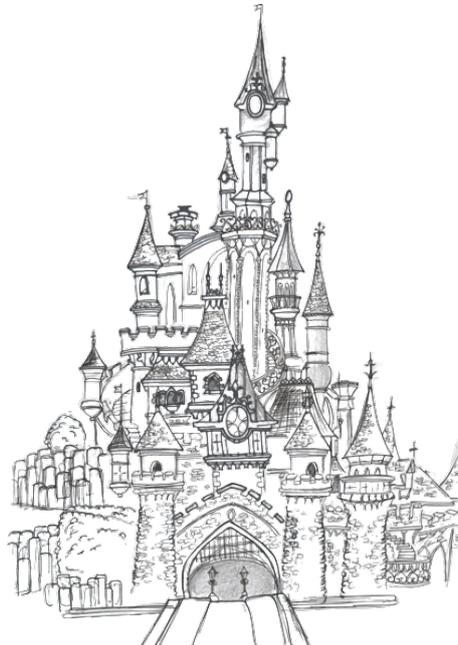
1 Найдите наименьшее количество вершин в графе, сумма степеней вершин в котором равна 22.

2 Могут ли степени вершин в графе быть равны: **a** 5, 2, 3, 1, 3?
b 8, 8, 8, 6, 5, 4, 2, 2, 1? **c** 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2?

3 Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 13 островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

4 В графе 15 вершин. Степени его вершин A и B не меньше 7 каждая. Докажите, что по ребрам графа можно пройти из вершины A в вершину B .

5 В классе стоят компьютеры, пронумерованные числами $1, 2, \dots, 99$. Если сумма всех цифр в номерах двух компьютеров делится на 3, то эти компьютеры соединены проводом. (Например, между компьютерами 4 и 23 есть провод, поскольку $4 + 2 + 3 = 9$ делится на 3. А между компьютерами 17 и 26 провода нет, поскольку $1 + 7 + 2 + 6 = 16$ на 3 не делится.) Можно ли по проводам передать файл с компьютера 15 на компьютер 43 (возможно, через промежуточные компьютеры)?



Зайчики. Вспоминаем графы. Добавка.

6 Докажите, что если в графе больше одной вершины, то найдутся две вершины одинаковой степени.

7 В одной стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

8 Можно ли обойти (побывать в каждой клетке по одному разу и вернуться назад) шахматным конём

- a доску 4×4 без угловых клеток; b доску 4×4 ?

9★ В Тридевятом Царстве 99 городов, некоторые из них соединены дорогами длиной в 1, 3 или 5 вёрст. От каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением. Докажите, что суммарное расстояние, пройденное гонцами, делится на 4.

