Математический кружок 6 класса в школе 1543.

Инвариант. Зайчики.

– Сколько Вам лет?
– Двадцать.
– Но пять лет назад вы говорили тоже самое...
– Я не из тех, кто говорит сегодня одно, а завтра другое...

Вступление

1 На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевёрнут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

2 На шахматной доске стоит фигура «попрыгунчик», которая каждым ходом сдвигается на три клетки по вертикали и одну по горизонтали, или на три по горизонтали и одну по вертикали. Может ли «попрыгунчик», сделав несколько ходов, попасть в клетку, соседнюю исходной по стороне?

А теперь сами

1 Сто фишек пронумеровали и выложили в ряд: 1, 2, 3, . . . , 100. Петя за один ход может поменять местами две фишки, стоящие через одну. Может ли он за несколько ходов переставить все фишки в обратном порядке?

2 У Ильи есть табличка 3×3, заполненная числами от 1 до 9 так, как в таблице слева. За один ход Илья может поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Может ли он за несколько ходов получить таблицу справа?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

3 В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

4 На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли, проделав это несколько раз, сделать эти числа равными?

Инвариант. Зайчики. Добавка.

5 На чудо-дереве растут 1543 башмака и 1543 валенка. За один раз разрешается сорвать с него два ботинка. Если сорвать два башмака или два валенка, то вырастет один валенок, а если сорвать один башмак и один валенок, то вырастет один башмак. В итоге остался один ботинок. Какой он?

6 Дана покрашенная шахматной раскраской доска 8×8. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли при этом получиться доска, у которой ровно одна черная клетка?

7 На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке – по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи усесться на одной ёлке?

8 В таблице 4×4 a одна клетка; b четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, а все остальные — белым. За один ход разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки в одной строке или в одном столбце. Можно ли получить с помощью таких операций полностью белую доску?

9 Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?