Процессы — инварианты и полуинварианты. Зайчики.

Вступление

0 При игре в «Брюссельскую капусту» сначала рисуют на листе бумаги кривую и ставят на ней несколько черточек. Получается несколько «хвостиков»: два конца кривой и еще по паре «хвостиков» от каждой черточки.

За ход два «хвостика» соединяют кривой дугой, не пересекающей ранее проведенных линий, а на середину дуги ставят черточку, создавая еще два «хвостика». Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что исход игры не зависит от того, как играют игроки.

А теперь сами!

Полуинвариантом называется величина, которая в процессе преобразований изменяется монотонно, то есть постоянно увеличивается или постоянно уменьшается.

1 На доске написаны несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них (x и y) и заменяют их на числа $x-2$ и $y+1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

2 Фирма «Селекционер» плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то назавтра он будет иметь $2m-n$ ручек и $2n-m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным.

a Изначально у монстра 999 ручек и 1000 ножек. Докажите, что через некоторое время монстр погибнет.

b Докажите, что монстр будет жить вечно только если у него ручек столько же, сколько и ножек.

3 a По кругу стоит 1000 фишек трёх цветов. Если оба соседа фишки одного цвета, а сама фишка — другого, то за ход её можно перекрасить в цвет соседей. Докажите, что можно будет сделать лишь конечное число таких ходов

b На стене в ряд расположены 100 переключателей. Каждый может находиться в четырех положениях: влево, вправо, вверх, вниз. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает средний в то положение, которое имеет один их крайних переключателей среди этих трех. Докажите, что он не может проделать эту операцию более 100 раз.

4 a Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

b В 100500 год в галактической республике происходят выборы. Все планеты республики подняли флаги — зеленые либо синие. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 парсеков. Одна из планет, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

5 В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами.

a Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2 \ldots, 100$.

b Какое наибольшее число ходов могут продолжаться перестановки?

6 Есть 10 различных чисел (возможно, не целых). За одну операцию можно два не равных числа заменить на два равных с той же суммой.

a Может ли процесс продолжаться бесконечно?

b Может ли стартовый набор чисел возникнуть еще раз?

c Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?

7 В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города А в самый удаленный от него город Б, оттуда — в самый удаленный от него город С и т.д. Докажите, что если С не совпадает с А, то путешественник никогда не вернется в А.

8 По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

9 В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага (считается, что вражда взаимна).

10 По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (k-й и $(k+1)$-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)