

## Кролики. Вспоминаем графы

Вставайте граф, Вас ждут великие дела!

---

**Определение.** *Графом* называется множество точек — *вершин*, соединенных «дорогами» — *ребрами*.

### Вступление

**1** Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые веревки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой берёзе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?

**2** Сколько рёбер в полном графе  а на 4 вершинах?  
 б На 10 вершинах?  в На  $n$  вершинах?

**3** **Лемма о рукопожатиях:** Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени чётно.

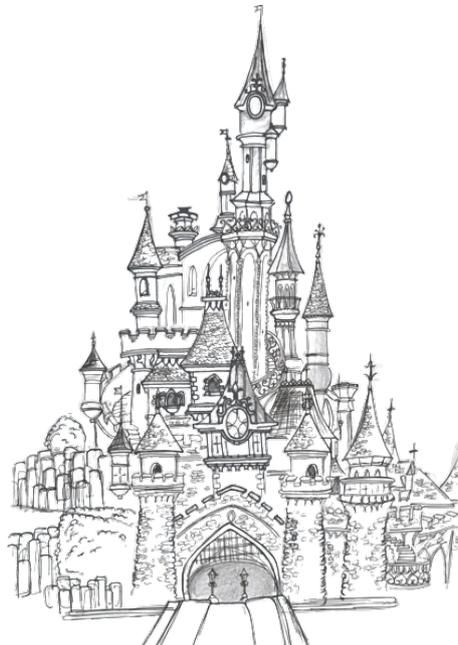
### Задачи

**1** Найдите наименьшее количество вершин в графе, сумма степеней вершин в котором равна 22.

**2** Докажите, что не существует графа на пяти вершинах, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

**3** В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

**4** Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 13 островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?



## Кролики. Вспоминаем графы. Добавка.

5 В классе стоят компьютеры, пронумерованные числами  $1, 2, \dots, 99$ . Если сумма всех цифр в номерах двух компьютеров делится на 3, то эти компьютеры соединены проводом. (Например, между компьютерами 4 и 23 есть провод, поскольку  $4 + 2 + 3 = 9$  делится на 3. А между компьютерами 17 и 26 провода нет, поскольку  $1 + 7 + 2 + 6 = 16$  на 3 не делится.) Можно ли по проводам передать файл с компьютера 15 на компьютер 43 (возможно, через промежуточные компьютеры)?

6 Докажите, что если в графе больше одной вершины, то найдутся две вершины одинаковой степени.

7 Можно ли обойти (побывать в каждой клетке по одному разу и вернуться назад) шахматным конём

- a) доску  $4 \times 4$  без угловых клеток;      b) доску  $4 \times 4$ ?

8 Несколько фишек двух цветов расположены в ряд, причём встречаются оба цвета. Известно, что любые две фишки, между которыми есть 2 или 3 фишки, одного цвета. Какое наибольшее число фишек может быть?

