Математический кружок 6 класса в школе 1543.

Кролики. Вспоминаем графы

> Вставайте граф, Вас ждут великие дела!

Определение. *Графом* называется множество точек — *вершин*, соединенных «дорогами» — *ребрами.*

Вступление

1 Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые вервеки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой берёзе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?

2 Сколько рёбер в полном графе a на 4 вершинах? b На 10 вершинах? c На n вершинах?

3 **Лемма о рукопожатиях:** Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

Задачи

1 Найдите наименьшее количество вершин в графе, сумма степеней вершин в котором равна 22.

2 Докажите, что не существует графа на пяти вершинах, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

3 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

4 Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 13 островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Кролики. Вспоминаем графы. Добавка.

5 В классе стоят компьютеры, пронумерованные числами $1, 2, \ldots, 99$. Если сумма всех цифр в номерах двух компьютеров делится на 3, то эти компьютеры соединены проводом. (Например, между компьютерами 4 и 23 есть провод, поскольку $4+2+3=9$ делится на 3. А между компьютерами 17 и 26 провода нет, поскольку $1+7+2+6=16$ на 3 не делится.) Можно ли по проводам передать файл с компьютера 15 на компьютер 43 (возможно, через промежуточные компьютеры)?

6 Докажите, что если в графе больше одной вершины, то найдутся две вершины одинаковой степени.

7 Можно ли обойти (побывать в каждой клетке по одному разу и вернуться назад) шахматным конём

a) доску 4×4 без угловых клеток; b) доску 4×4?

8 Несколько фишек двух цветов расположены в ряд, причём встречаются оба цвета. Известно, что любые две фишки, между которыми есть 2 или 3 фишки, одного цвета. Какое наибольшее число фишек может быть?