Математический кружок 6 класса в школе 1543.

В поисках липы. Кролики.

В этом листочке вместе с задачами даны и их решения, только, к сожалению, неверные.

• Найдите все ошибки в этих решениях.

• Оцените, насколько сильно ошибки «портят» решение. Исправьте их или предложите другое (верное) решение.

1 Некий торговец купил товар за 1 рубль, потом продал его за 2 рубля, потом купил его за 3 и продал за 4, и так далее, последний раз купил за 99 рублей, а продал за 100. Какую прибыль он в итоге получил?

Решение: Купив товар за рубль, а продав за 2, торговец приобрёл 1 рубль. Но, купив после этого этот же товар за 3 рубля, он потерял 1 рубль. Рассуждая далее аналогично, приходим к тому, что его прибыль образовалась только от последней продажи и составляет 1 рубль.

2 Дана клетчатая доска размером 4×4 с шахматной раскраской. За один шаг можно выбрать на этой доске произвольный квадрат размером 2×2 и изменить цвет каждой его клетки на противоположный. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?

Решение: Нельзя. Заметим, что при перекрашивании любого квадрата 2×2 в любой строке доски остаются две белые и две чёрные клетки. Следовательно, все клетки не могут оказаться одного цвета.

3 Дата 22.02.2022 читается одинаково слева направо и справа налево. Сколько всего таких дат в XXI веке? (Дата записывается в формате ДД.ММ.ГГГГ.)

Решение: Первые две цифры года в XXI веке не меняются, меняются только последние две. Поэтому месяц определён, а может меняться только число. Но число принимает значения от 01 до 29, значит, таких дат не больше 29. Так как 2092 — високосный год, то дата 29.02.2092 существует, и таких дат всего 29.

4 На острове живут рыцари и лжецы. Как-то за круглым столом собралось 12 островитян. Каждый их них сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Сколько лжецов было за столом?

Решение: Все сидящие за столом не могли быть лжецами, так как тогда для каждого из них высказывание было бы верным. Значит, за столом был хотя бы один рыцарь. Его правый сосед — лжец, так как рыцарь сказал правду. Правый сосед лжеца — рыцарь, так как лжец солгал. Правый сосед этого рыцаря — лжец, и так далее. Таким образом, рыцари и лжецы сидят через одного, следовательно, лжецов было 6.

5 Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно 4 делителя и делящихся на 5?

Ответ: 10. Решение: У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвертый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

В поисках липы. Добавка. Кролики.

$\boxed{6}$ Сумма трёх натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение?

Ответ: на 5 нулей. Пример: $400+100+20=520$, $400\cdot100\cdot20=800000$.

Оценка: Посмотрим, сколько пятёрок может быть в разложении произведения на простые множители. Все слагаемые не могут делиться на 25, так как сумма на 25 не делится. Если два слагаемых делятся на 25, то третье даст в разложении не более чем одну пятёрку, поэтому всего в разложении будет не больше пяти пятёрок. Значит, и нулей не более пяти.

$\boxed{7}$ Сколькими способами можно нарисовать прямоугольник по линиям сетки на клетчатом листе бумаги размером 15×43?

Решение: Каждый прямоугольник задаётся однозначно своими верхней левой и правой нижней вершинами. Выберем одну вершину — это можно сделать $16\cdot44$ способами — столько узлов решётки на листе размером 15×43. Второй узел не должен лежать с первым в одной строке и в одном столбце (а также не должен с ним совпадать). Таким образом, он может лежать в любой из 15 оставшихся строк и в любом из 43 оставшихся столбцов, то есть может быть выбран $15\cdot43$ способами.

Итого по правилу произведения существует $16\cdot44\cdot15\cdot43$ способов выбрать две вершины прямоугольника. Но при этом мы посчитали каждый прямоугольник два раза: выбирая сначала верхний левый, а затем нижний правый угол и наоборот, поэтому полученное произведение надо разделить на 2. Итого получается $(16\cdot44\cdot15\cdot43)/2$ способов.

$\boxed{8}$ В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.

Решение: Разделим депутатов на две палаты произвольным образом. Назовём депутатов, у которых 2 или 3 врага внутри палаты, *злыми*, а остальных *добрыми*. Если все депутаты добрые, то задача решена. Если нет — переведем какого-нибудь злого депутата в другую палату. Там у него не больше одного врага, значит он подобреет. Будем продолжать переводить злых депутатов в другую палату до тех пор, пока они все не подобреют. Так мы получим требуемое разделение.