

Математический кружок 6 класса в школе 1543.
Кролики. Дискретная непрерывность.

Принцип дискретной непрерывности. Целое число каждую минуту увеличивается или уменьшается на 1. Если вначале оно было отрицательным, а в конце стало положительным, то в какой-то момент оно было равно 0.

1 На сороковой минуте матча «Спартак» выигрывал со счётом 2:1, а на восьмидесятой уже проигрывал 4:5. Обязательно ли был момент, когда счёт был ничейным?

2 В ряд выложено 20 белых и 20 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.

Задачи для самостоятельного решения

1 Футбольный матч между шестиклассниками и пятиклассниками закончился со счётом 5 : 8. Аня (болеющий за 5) и Вова (болеющий за 6) собираются посмотреть запись этого матча по очереди, уже зная итоговый счёт: сначала смотрит Аня (Вова в это время ведёт кружок), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

2 Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

3 У Коли было число 1. Каждую секунду он делал одно из трёх действий: умножал число на одну из его цифр, прибавлял одну из цифр числа или вычитал одну из цифр числа. Когда он закончил, у его числа было 1543 знака. Докажите, что и 100 знаков в какой-то момент тоже было.

4 В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают выходить замуж за не богатых женщин (то есть тех, у кого зарплата не больше, чем у премьер-министра). Докажите, что можно установить такую зарплату премьер-министру, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различны.)

5 Никита после отбоя начал писать Максиму сообщения в мессенджере. Наконец, после 100-го сообщения Максим сподобился ответить Никите, и между ними завязалась оживлённая переписка. В какой-то момент Никита уснул, но Максим этого не знал, и отправил ещё 50 сообщений, после чего и сам уснул. Докажите, что найдется отрезок времени, в течение которого они отправили друг другу ровно по 30 сообщений.

6 В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

а Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них было ровно 5 девочек.

б Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых ровно 10 девочек?

с Теперь эти же дети сидят по кругу. Всегда ли можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых ровно 10 девочек?

Кролики. Дискретная непрерывность. Добавка.

7 В клетках таблицы 100×100 произвольным образом расположены 2022 шашки. Докажите, что доску можно разрезать по границам клеток так, чтобы в каждой части оказалось поровну шашек.

8 За круглым столом сидит 400 гномов в колпаках с помпонами, причем, у любых двух сидящих рядом гномов количество помпонов отличается на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых помпонов на колпаках поровну.

9 Докажите, что в любом шестизначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась в промежутке от 0 до 9.

