

Информация-2. Синие.

В этом занятии мы будем использовать немного другой подход к оценкам минимального числа операций, который в литературе называется **метод противника**.

Давайте считать, что при некоторых условиях играют двое: Алиса и Боб. Цель Алисы угадать некоторую сущность (например, число или номер фальшивой монеты) за наименьшее число разрешённых в задаче вопросов. При этом Боб не обязан загадывать число в самом начале.

Давайте считать, что есть множество всех возможных ответов, которые Алиса может дать. На очередной вопрос Боб может ответить как угодно, при условии, что существует какой-то объект из множества Алисиных ответов, что ответ как на текущий, так и на все предыдущие вопросы для него верны. Цель Боба — максимизация числа ходов Алисы.

0 (Пример) Алиса и Боб играют в угадывание числа от 1 до 100. Алиса может задавать только вопросы вида «правда ли, что твоё число больше n ?» Как действовать Бобу, чтобы Алиса сделала не меньше семи ходов?

1 Покажите, как решать нулевую задачу, при условии, что Алиса может задавать любые вопросы, допускающие ответы «да» или «нет».

2 Пусть Алиса в нулевой задаче должна вначале написать все вопросы, и только после этого она получит все ответы. Докажите, что семи вопросов ей не хватит. Какое наименьшее число вопросов ей понадобится?

3 Пусть у вас есть 100 предметов разного веса. За один ход можно определить, какой из двух предметов тяжелее. Какое наименьшее число действий понадобится для того, чтобы выяснить, какой из предметов самый тяжёлый?

4 Решите предыдущую задачу в предположении, что сначала надо задать все вопросы.

5 На шахматной доске у вас есть n ладей, а у соперника есть король.

1. Вы его не видите, хотя он и ходит по всем шахматным правилам.
2. Если вы поставите мат, игра закончится.
3. Если поставите шах, вам ничего не скажут.
4. Не забывайте, что король умеет есть ладьи. Если ладью съедают, то вы это видите.
5. Выбор начальной позиции ладей за вами. Начальная позиция короля вам неизвестна.

Можно ли гарантированно поставить мат если:

- a) У вас 6 ладей?
- b) У вас 4 ладьи?
- c) У вас 3 ладьи?
- d) У вас 2 ладьи?

6 Есть квадратная доска 3 на 3. Есть два игрока - Алиса и Боб и судья Чарли. В начале игры Чарли говорит Алисе номер строки (от 1 до 3), а Бобу номер столбца

(тоже от 1 до 3). Цель Алисы - заполнить строку числами ± 1 так, чтобы произведение чисел было равно 1, а цель Боба - расставить ± 1 так, чтобы произведение в его столбце было бы равно -1 . Если число на пересечении строки и столбца совпадает, Алиса и Боб выигрывают у Чарли. Иначе - проигрывают.

Естественно, Алиса и Боб могут как-то договориться, но ровно до момента объявления им чисел.

a Докажите, что у Алисы и Боба не смогут гарантированно выиграть.

b (*) Как им выигрывать в 8 из 9 случаев, если Чарли будет называть числа случайно?

7 Представьте, что у вас есть граф с n вершинами, и Алиса может задавать вопросы вида «правда ли, что между i и j есть ребро». Она хочет понять, связан граф или нет. Докажите, что, чтобы гарантированно это определить, ей придётся задать не менее чем $\frac{n(n-1)}{2}$ вопросов.