

Зайчики. Чётность

Я любил загадывать, считая вагоны проезжающего состава. Если получалось чётное количество, значит, мне повезёт. А если получалось нечётное, то я прибавлял паравоз.

Корней Чуковский

Вступление.

1 Чётными или нечётными будут сумма и произведение а двух чётных чисел; б двух нечётных чисел; в чётного и нечётного чисел? Почему?

2 Четным или нечетным будет число

а $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 21$;

д $31 + 32 + 33 + \dots + 40$;

б $21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 29$;

е $11 + 12 + 13 + \dots + 21$;

в $42 \cdot 44 \cdot 46 \cdot \dots \cdot 54$;

ф $30 - 29 + 28 - 27 + \dots + 16 - 15$?

3 В ряд выписаны все числа от 1 до 2021. Требуется расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать? Почему?

4 Может ли число, составленное из одних пятёрок, делиться нацело на число, составленное из одних четвёрок? А наоборот?

Задачи для самостоятельного решения.

1 а Сумма двух целых чисел нечётна. Чётно или нечётно их произведение?

б Сумма трёх целых чисел чётна. Чётно или нечётно их произведение?

в Произведение двух чисел умножили на их сумму. Результат будет чётным или нечётным?

2 Ковбой Билл зашёл в магазин и попросил у продавца моток веревки за 2 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Продавец потребовал с него 8 долларов 25 центов, и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда продавец пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что его пытаются обсчитать?

3 Чётным или нечётным является число

а $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2019 \cdot 2021$;

в $1 + 2 + 3 + \dots + 2021$;

б $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + 2021 \cdot 2022$;

г $1 + 3 + 5 + \dots + 2021$?

4 Хулиганы Фред и Джордж порвали учебник, причем Фред рвал каждый кусок на 3 части, а Джордж на 5. При попытке собрать учебник нашли 100 кусочков. Все ли кусочки нашли?

5 Гарри сосчитал сумму 13 чисел и получил 2020, а Рон перемножил эти числа и получил 2020758945. Докажите, что кто-то из них ошибся

Зайчики. Чётность. Добавка.

6 Можно ли разбить натуральные числа от 1 до 21 на несколько групп так, чтобы в каждой группе было число, равное сумме всех остальных?

7 **a** Аборигены поймали Кука и просят за него выкуп в 455 рупий пятьюдесятью монетами достоинствами в 5, 17 или 31 рупию. Можно ли выкупить Кука на таких условиях?

b А если бы они хотели получить сумму 910 рупий пятьюдесятью монетами по 10, 34 и 62 рупии?

8 Даны пять чисел; сумма любых трёх из них чётна. Докажите, что все числа чётны.

9 По кругу в произвольном порядке расставлены числа $1, 2, \dots, 2021$. Докажите, что найдутся два соседних числа, после выкидывания которых оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой.

10 Как-то раз Дядя Фёдор, Матроскин и Шарик отправились с почты домой. Дядя Фёдор вышел первым, а Матроскин последним. По дороге домой Дядя Фёдор обгонял других, либо его обгоняли ровно 8 раз. Матроскин обгонял других, либо его обгоняли ровно 6 раз. Известно, что Дядя Фёдор пришел домой позже, чем Шарик. В каком порядке друзья пришли домой?

Суперзадача

1 Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 30 (каждое должно встречаться один раз) таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на следующее за ними по часовой стрелке?

