

## Зайчики. Инвариант.

Но мы научились драться  
и научились греться  
у спрятавшегося солнца  
и до земли добраться  
без лоцманов, без лоций,  
но – главное – не повторяться.  
Нам нравится постоянство

Иосиф Бродский

### Вступление

**1** 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

**2** На доске написаны числа от 1 до 20. Каждую минуту Маша подходит к доске, и вместо каких-то двух чисел пишет их **a** сумму; **b** произведение. Когда на доске останется одно число, Маша остановится. Какое число может быть написано на доске?

### А теперь сами

**1** На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут доннышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

**2** В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

**3** На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

**4** **a** Круг разделен на 6 секторов, в которых по часовой стрелке стоят числа: 1,0,1,0,0,0. Можно прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

**b** Круг разделен на десять секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

**5** У Ильи есть табличка  $3 \times 3$ , заполненная числами от 1 до 9 так, как в таблице слева. За один ход Илья может поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Может ли он за несколько ходов получить таблицу справа?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

## Зайчики. Инвариант. Добавка.

6 На чудо-дереве растут 1543 башмака и 1543 валенка. За один раз разрешается сорвать с него два ботинка. Если сорвать два башмака или два валенка, то вырастет один валенок, а если сорвать один башмак и один валенок, то вырастет один башмак. В итоге остался один ботинок. Какой он?

7 На доске написаны натуральные числа: а от 1 до 2022; б от 1 до 1543. Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать их разность (из большего вычитаем меньшее). Можно ли за несколько операций добиться того, чтобы на доске остались только нули?

8 В таблице  $4 \times 4$  а одна клетка; б четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, а все остальные — белым. За один ход разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки в одной строке или в одном столбце. Можно ли получить с помощью таких операций полностью белую доску?

9 Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

10 На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи усесться на одной ёлке?

### Суперзадача

1 а На доске написаны числа 1, 2, 3, . . . , 19, 20. За ход разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их сумму, уменьшенную на 1 (то есть вместо  $a$  и  $b$  пишем  $a + b - 1$ ). Какое число могло остаться после 19 ходов?

б На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трёх камней?

