

Зайчики. Графы-2.

Вставайте граф, рассвет уже пощелется.

Ю.И. Визбор

Вступление.

1 В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?

2 Как вообще посчитать количество рёбер в любом графе, зная число вершин и степень каждой из них?

3 Лемма о рукопожатиях: Докажите, что в любом графе число нечетных вершин чётно.

4 Могут ли степени вершин в графе быть равны: **a** 5, 2, 3, 1, 3? **b** 8, 8, 8, 6, 5, 4, 2, 2, 1? **c** 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2?

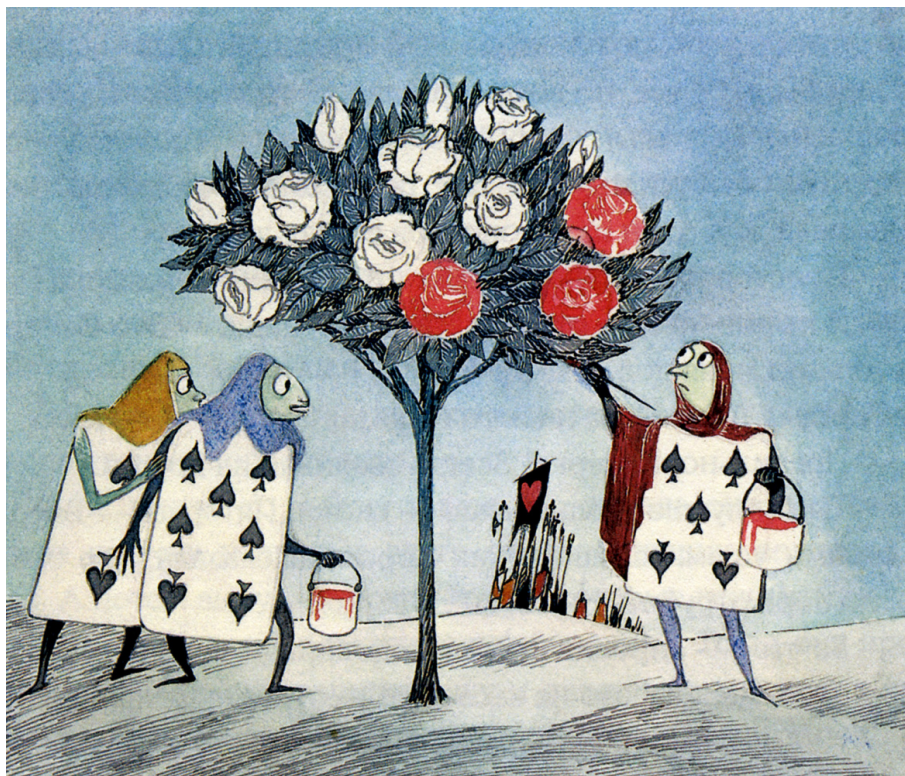
Задачи для самостоятельного решения.

1 В доме отдыха 2019 корпусов. Пьяный электрик Вася решил соединить телефонными проводами каждый корпус ровно с пятью другими. Сможет ли он это сделать?

2 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

3 На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число покрашенных соседей?

4 На карантине жители города М, сидя дома по одному, созванивались друг с другом по скайпу. Вечером спецслужбы посчитали, что каждый из жителей разговаривал по скайпу 3 раза. Могло ли общее количество созвонов по скайпу в этом городе за день быть ровно 2020?



Зайчики. Графы 2. Добавка.

5 Можно ли нарисовать на плоскости 7 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими (отрезкам разрешено пересекаться в одной точке)?

6 Однажды в школе устроили однокруговой (каждая команда играет с каждой) турнир на 15 команд. Докажите, что в любой момент времени турнира найдутся 2 команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

7 Докажите что в любом графе обязательно есть две вершины одинаковой степени.

8 В ряд выстроились 100 человек, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них заявил: «Слева от меня лжецов больше, чем справа». Сколько среди них лжецов?

Суперзадача

1 В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

