

Математический кружок 5 класса в школе 1543.
Кенгурята. Игры. Симметрии и повторения

Чтобы выиграть, прежде всего нужно играть.

Эйнштейн

Вступление.

Какие бывают симметрии? Давайте вспомним на примере задачи из старого листочка:

На доске 2021×2021 расставлена 2021 шашка, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

1 Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть независимо от ходов противника, и как ему нужно для этого играть?

2 У ромашки 20 лепестков. Играют двое. За ход можно сорвать любые 2 рядом растущих лепестка. Проигрывает тот кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть независимо от ходов противника?

3 **a** Имеются две кучки, в обеих по 12 конфет. За один ход можно съесть любое ненулевое число конфет, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто съел последнюю конфету. Кто из игроков, первый или второй, может победить независимо от ходов противника?

b Имеются две кучки конфет, в одной 12 конфет, в другой 15 конфет. За один ход можно съесть любое ненулевое число конфет, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто съел последнюю конфету. Кто из игроков, первый или второй, может победить независимо от ходов противника?

Задачи для самостоятельного решения.

1 На столе выложены две одинаковые монеты по 100500 рублей. Играют двое. Каждый игрок за один ход может взять любую из монет и разменять ее меньшими монетами, но на ту же сумму. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Монеты берутся из набора 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и 1 рубль).

2 В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию и какая она?

3 **a** Есть две клетчатых шоколадки 4×5 . Двое по очереди разламывают шоколадку или любой из ранее отломанных кусков на два меньших по границам клеток. Если образуются один или несколько одноклеточных кусков, отломивший их съедает. Докажите, что второй может съесть не меньше первого.

b Теперь есть только одна клетчатая шоколадка 8×5 . Двое по очереди разламывают шоколадку или любой из ранее отломанных кусков на два меньших по границам клеток. Если образуются один или несколько одноклеточных кусков, отломивший их съедает. Докажите, что теперь уже первый может съесть не меньше второго.

4 Дана клетчатая доска 10×10 . За один ход разрешается покрыть любые соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Кенгурята. Игры. Симметрии и повторения. Добавка.

5 Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы М и П, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдает посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

6 а В ряд лежат 25 мандаринок. Петя и Вася едят по очереди одну или две изначально соседние мандаринки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре?

б А если мандаринки лежат по кругу?

7 Двое по очереди разламывают шоколадку размером 10×10 . За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Кто выигрывает при правильной игре, если выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1 .

8 Петя и Вася играют в игру на шахматной доске 9×9 . Они по очереди ставят фишки на свободные клетки этой доски. Первую фишку Петя ставит куда угодно, а каждая из остальных фишек должна быть соседней по стороне ровно с одной из уже поставленных фишек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

9 На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трех клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

10 На доске записаны числа: 2021 и 2022. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа, либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное. Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Суперзадача

1 Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (при своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

