

## Кенгурята. Графы-2.

Вставайте граф, рассвет уже пощелкает.

Ю.И. Визбор

**Определение:** Граф называется **связным**, если в нём между любыми двумя вершинами существует путь, проходящий по рёбрам графа.

Если граф не связан, то в нём можно выделить **компоненты связности**, то есть «куски», являющиеся связными графами.

**1** На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами  $a$  и  $b$  соединены ребром только в том случае, если одно из чисел  $a$  или  $b$  делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

**2** В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**3** Несколько фишек двух цветов расположены в ряд, причём встречаются оба цвета. Известно, что любые две фишки, между которыми есть 2 или 3 фишки, одного цвета. Какое наибольшее число фишек может быть?

**4** В стране любые два города соединены или железной дорогой, или авиалинией. Доказать, что один из видов транспорта позволяет добраться из любого города в любой.

**5** В одной стране некоторые города связаны друг с другом авиалиниями. Из Москвы выходит 25 авиалиний, из города Ижевск — одна, из всех остальных городов — по 10 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (возможно, с пересадками).

**6** Степень каждой вершины связного графа не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

**7** Несколько деревень соединены между собой дорогами, причем от каждой можно добраться до любой другой (возможно через другую деревню). Из деревни Четвёркино выходит 4 дороги, из Пятёркино — 5, из Шестёркино — 6, из Семёркино — 7, а из остальных выходит по двадцать дорог. Потом одну дорогу закрыли и появились две такие деревни, которые теперь не соединены меж собой. Докажите, что от Пятёркино теперь до Семеркино не доберешься.

**8** На турбазе 12 домиков, между которыми крот прокопал 56 не пересекающихся подземных ходов (два домика соединяются не более чем одним ходом). Докажите, что крот из любого домика может попасть в любой другой, передвигаясь по этим ходам.

**9** Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть «двойник» в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а каждые два не соединённых в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране девочка Алиса не может проехать из города А в город В, сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок

### Суперзадача

**1** В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

## Кенгурята. Графы-2.

Вставайте граф, рассвет уже пощелкает.

Ю.И. Визбор

**Определение:** Граф называется **связным**, если в нём между любыми двумя вершинами существует путь, проходящий по рёбрам графа.

Если граф не связан, то в нём можно выделить **компоненты связности**, то есть «куски», являющиеся связными графами.

**1** На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами  $a$  и  $b$  соединены ребром только в том случае, если одно из чисел  $a$  или  $b$  делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

**2** В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**3** Несколько фишек двух цветов расположены в ряд, причём встречаются оба цвета. Известно, что любые две фишки, между которыми есть 2 или 3 фишки, одного цвета. Какое наибольшее число фишек может быть?

**4** В стране любые два города соединены или железной дорогой, или авиалинией. Доказать, что один из видов транспорта позволяет добраться из любого города в любой.

**5** В одной стране некоторые города связаны друг с другом авиалиниями. Из Москвы выходит 25 авиалиний, из города Ижевск — одна, из всех остальных городов — по 10 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (возможно, с пересадками).

**6** Степень каждой вершины связного графа не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

**7** Несколько деревень соединены между собой дорогами, причем от каждой можно добраться до любой другой (возможно через другую деревню). Из деревни Четвёркино выходит 4 дороги, из Пятёркино — 5, из Шестёркино — 6, из Семёркино — 7, а из остальных выходит по двадцать дорог. Потом одну дорогу закрыли и появились две такие деревни, которые теперь не соединены меж собой. Докажите, что от Пятёркино теперь до Семеркино не доберешься.

**8** На турбазе 12 домиков, между которыми крот прокопал 56 не пересекающихся подземных ходов (два домика соединяются не более чем одним ходом). Докажите, что крот из любого домика может попасть в любой другой, передвигаясь по этим ходам.

**9** Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть «двойник» в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а каждые два не соединённых в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране девочка Алиса не может проехать из города А в город В, сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок

### Суперзадача

**1** В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.