

Математический кружок 5 класса в школе 1543.
Кенгурята. Графы, знакомство

Вставайте граф, Вас ждут великие дела!

Определение. *Графом* называется множество точек — *вершин*, соединенных «дорогами» — *ребрами*.

0 Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

1 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий, делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

2 Семь шестиклассников играли в шахматы. Известно, что Игорь сыграл шесть партий, Кирилл — пять, Арсений и Лев — по три, Настя и Паша — по две, Катя — одну. Кто с кем сыграл? Любая пара ребят играла не более одного раза.

Определение. *Полным графом* называется граф, в котором между любыми двумя вершинами проведено ребро.

3 Сколько рёбер в полном графе **a** с 4 вершинами? **b** с 10 вершинами? **c** с n вершинами?

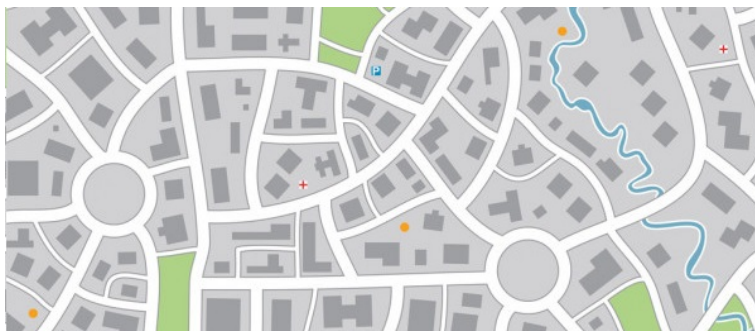
4 В стране 1543 города, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

5 В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?

Определение. *Степенью вершины* называется количество ребер, выходящих из этой вершины.

6 Как вообще посчитать количество рёбер в любом графе, зная число вершин и степень каждой из них?

7 Лемма о рукопожатиях: Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.



Кенгурята. Графы, знакомство. Добавка.

8 Могут ли степени вершин в графе быть равны: **a** 5, 2, 3, 1, 3? **b** 8, 8, 8, 6, 5, 4, 2, 2, 1? **c** 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2?

9 На карантине жители города М, сидя дома по одному, созванивались друг с другом по скайпу. Вечером спецслужбы посчитали, что каждый из жителей разговаривал по скайпу 3 раза. Могло ли общее количество созвонов по скайпу в этом городе за день быть ровно 2020?

10 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

11 Можно ли нарисовать на плоскости 7 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими (отрезкам разрешено пересекаться в одной точке)?

12 На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты — соседи, если они касаются друг друга).

13 В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых и 2 черных (сверху два белых, снизу два черных). Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

14 После уроков каждый школьник кинул в одного из других снежком, и в каждого школьника кто-то кинул снежком. Докажите, что их можно разбить на 3 команды так, чтобы в каждой команде никто ни в кого не кидал.

Суперзадача

1 В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

