

Математический кружок 5 класса в школе 1543.  
Графы. Считаем рёбра. Жёлтые.

Вставайте, граф, рассвет уже  
полощется.

Ю.И. Визбор

XXXIV Математический праздник состоится  
19 февраля 2023 года. Подробную информацию ищите  
на сайте: <https://olympiads.mcsme.ru/matprazdnik/>



### Вступление

*Графом* называется набор объектов (они изображаются точками-вершинами), некоторые пары которых находятся в каком-то отношении (соединены отрезками-рёбрами).

*Степень вершины* графа — это количество выходящих из неё рёбер.

1 В стране  а) 5  б) 12 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

2 В группе кружка 10 человек. Может ли быть так, что 4 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 3 — по 4 друга, и 3 — по 5 друзей?

*Лемма о рукопожатиях.* Сумма степеней всех вершин графа чётна.

### А теперь сами!

1 Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые верёвки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой берёзе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?

2 В графе из каждой вершины выходит по 7 рёбер.  а) Может ли в нём быть 15 вершин?  б) А может ли быть 43 ребра?

*Полным графом* называется граф, в котором между любыми двумя вершинами проведено ребро.

3 Сколько рёбер в полном графе  а) с 4 вершинами?  б) с 12 вершинами?

4 На научный конгресс съехалось 12 физиков и некоторое количество лириков. Каждый физик знаком с 4 лириками, а каждый лирик — с 3 физиками. Сколько лириков приехало на конгресс?

5 На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли оказаться, что у 5 закрашенных клеток по 4 закрашенных соседа (по стороне), у других 5 закрашенных клеток по 3 закрашенных соседа, еще у 5 закрашенных клеток по 2 закрашенных соседа, а у оставшихся 10 закрашенных клеток — по одному закрашенному соседу?

## Графы. Считаем рёбра. Жёлтые. Добавка.

6 В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда, когда прямая автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

7 Можно ли нарисовать 13 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими (отрезкам разрешено пересекаться в одной точке)?

8 В одной стране из столицы выходит 7 дорог, из города Дальний — одна дорога, а из остальных городов по 4 дороги. Обязательно ли из столицы можно доехать по дорогам до Дальнего?

9 Тамара заполняет клетки таблицы  $4 \times 4$  в каком-то порядке. Каждый раз она вписывает в клетку число, равное количеству соседних с ней (по стороне) клеток, которые уже заполнены. Заполнив всю таблицу, Тамара сложила все записанные в ней числа. Сколько у нее получилось?

