

Математический кружок 5 класса в школе 1543.
Графы. Считаем рёбра. Зелёные.

Вставайте, граф, рассвет уже
полощется.

Ю.И. Визбор

XXXIV Математический праздник состоится
19 февраля 2023 года. Подробную информацию ищите
на сайте: <https://olympiads.mcsme.ru/matprazdnik/>



Вступление

Графом называется набор объектов (они изображаются точками-*вершинами*), некоторые пары которых находятся в каком-то отношении (соединены отрезками-*рёбрами*).

Степень вершины графа — это количество выходящих из неё рёбер.

1 В стране 1543 города, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

2 В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

3 Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются семь островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Могло ли такое быть, что ни один из этих мостов не ведет на берег озера?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

А теперь сами!

1 Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые верёвки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой берёзе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?

2 В графе из каждой вершины выходит по 7 рёбер. **a** Может ли в нём быть 1543 вершины? **b** А может ли быть 1543 ребра?

Полным графом называется граф, в котором между любыми двумя вершинами проведено ребро.

3 Сколько рёбер в полном графе **a** с 5 вершинами? **b** с 12 вершинами?

4 В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда, когда прямая автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

5 На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число покрашенных соседей (по стороне)?

Графы. Считаем рёбра. Зелёные. Добавка.

6 Можно ли нарисовать 13 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими (отрезкам разрешено пересекаться в одной точке)?

7 На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты — соседи, если они касаются друг друга).

8 В одной стране из столицы выходит 7 дорог, из города Дальний — одна дорога, а из остальных городов по 4 дороги. Обязательно ли из столицы можно доехать по дорогам до Дальнего?

9 На шахматную доску 8×8 по одному выставляются короли: первый — на любую клетку, а каждый следующий должен побить нечетное число ранее выставленных королей. Можно ли заполнить все клетки доски?

