Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

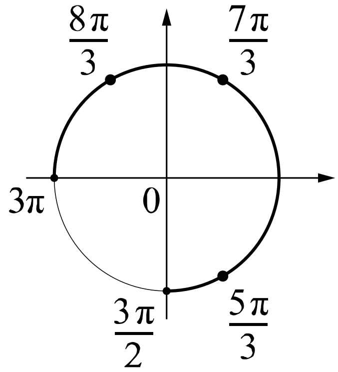
а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,75;\ \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Получим числа $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

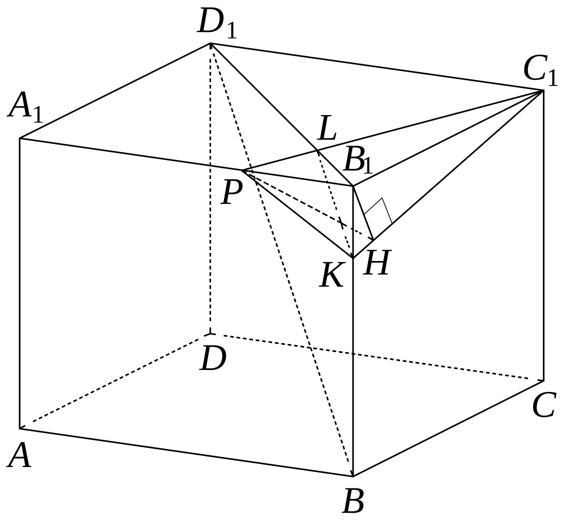
13

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 1,6$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями α и BB_1C_1.

Решение.



а) В плоскости BDD_1 через точку K проведём прямую, параллельную BD_1, и пересекающую B_1D_1 в точке L. Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P. Плоскость KC_1P проходит через прямую KL, параллельную B_1D_1, поэтому плоскость KC_1P параллельна прямой B_1D_1 по признаку параллельности прямой и плоскости. Значит треугольник KC_1P — сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α.

Так как прямые B_1D_1 и KL параллельны, то $B_1L : LD_1 = B_1K : KB = 1:4$. Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P : D_1C_1 = B_1L : D_1L = 1:4$. Значит, $A_1P : PB_1 = 3:1$.

б) Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую C_1K. По теореме о трёх перпендикулярах прямые PH и C_1K перпендикулярны. Значит, угол B_1HP искомый. Поскольку $A_1P : PB_1 = 3:1$, получаем $PB_1 = \frac{1}{2}$.

В прямоугольном треугольнике B_1C_1K имеем

$$B_1H = \frac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \frac{2}{\sqrt{26}}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\angle B_1HP = \frac{PB_1}{B_1H} = \frac{\sqrt{26}}{4}$, $\angle B_1HP = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{26}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\frac{(3x-4)^2}{x-3} \geq \frac{16-24x+9x^2}{15-8x+x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{(3x-4)^2}{x-3}-\frac{(3x-4)^2}{(x-3)(x-5)} \geq 0,$$

откуда следует, что $\frac{(3x-4)^2(x-6)}{(x-3)(x-5)} \geq 0$.

Получаем: $x=\frac{4}{3}$, или $3<x<5$, или $x \geq 6$.

Ответ: $\left\{\frac{4}{3}\right\} \cup (3;\, 5) \cup [6;\, +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 40 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{14S}{15},\ \ldots,\ \frac{2S}{15},\ \frac{S}{15},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r %. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{14kS}{15},\ \ldots,\ \frac{2kS}{15},\ \frac{kS}{15}.$$

Значит, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{15},\ \frac{14(k-1)S+S}{15},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{15},\ \frac{(k-1)S+S}{15}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=S\bigl(1+8(k-1)\bigr).$$

Общая сумма выплат на 40 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$8(k-1)=0,4;\quad k=1,05;\quad r=5.$$

Ответ: 5 %.

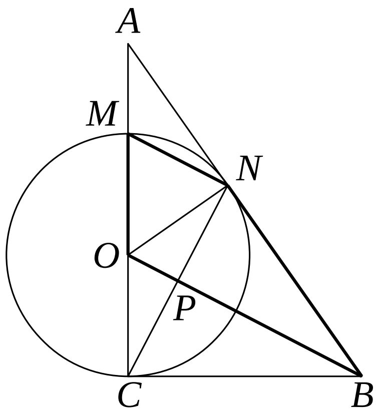
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 9$ и $AM : MC = 1 : 8$.

Решение.



а) Поскольку прямые AC и BC перпендикулярны, прямая BC — касательная к окружности. Прямая BO перпендикулярна прямой CN. Точка N лежит на окружности с диаметром CM, поэтому $\angle CNM = 90°$. Прямые BO и MN перпендикулярны одной и той же прямой CN, следовательно, они параллельны.

б) Пусть

$$AM = x,\ MC = 8x.$$

Тогда

$$OC = OM = 4x,\ OA = 5x,\ AC = 9x.$$

По свойству секущей и касательной, проведённых из одной точки, $AN^2 = AM \cdot AC$, следовательно, $AN = 3x$.

Поскольку прямые MN и BO параллельны, по теореме Фалеса получаем $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MO} = \frac{1}{4}$, следовательнно, $NB = 12x$. Отрезки BC и BN равны как отрезки касательных, проведённых из одной точки, значит, $BC = 12x$.

Поскольку $\angle CMN = \angle COB$, прямоугольные треугольники CNM и BCO подобны, следовательно,

$$MN = \frac{CN \cdot CO}{BC} = \frac{9 \cdot 4x}{12x} = 3.$$

Из подобия треугольников AMN и AOB следует, что

$$BO = \frac{MN \cdot AO}{AM} = \frac{3 \cdot 5x}{x} = 15.$$

Пусть отрезки BO и CN пересекаются в точке P. Тогда P — середина CN и $NP = \frac{1}{2}NC = \frac{9}{2}$.

По формуле площади трапеции

$$S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot NP = \frac{15 + 3}{2} \cdot \frac{9}{2} = 40{,}5.$$

Ответ: б) 40,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x+2|+|x-a|\right)^2-4\left(|x+2|+|x-a|\right)+3a\left(4-3a\right)=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t=|x+2|+|x-a|$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-4t+3a\left(4-3a\right)=0$. Решения этого уравнения имеют вид $t=3a$ или $t=4-3a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $|x+2|+|x-a|=3a$ или $|x+2|+|x-a|=4-3a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $|x+2|+|x-a|=b$ в зависимости от a и b. Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=|x+2|+|x-a|$. При $a\neq-2$ графиком этой функции является ломаная, состоящая из трёх звеньев, угловые коэффициенты которых равны -2, 0 и 2. Минимальное значение достигается на отрезке с концами -2 и a и равно $|a+2|$. Таким образом, уравнение $|x+2|+|x-a|=b$ имеет два решения при $b>|a+2|$, бесконечно много решений при $b=|a+2|$ и не имеет решений при $b<|a+2|$.

В случае $a=-2$ уравнение $2|x+2|=b$ имеет два решения при $b>0$, одно решение при $b=0$ и не имеет решений при $b<0$.

Уравнения $|x+2|+|x-a|=3a$ и $|x+2|+|x-a|=4-3a$ могут иметь общие решения при $3a=4-3a$, то есть при $a=\frac{2}{3}$. При $a=\frac{2}{3}$ оба уравнения принимают вид $|x+2|+\left|x-\frac{2}{3}\right|=2$ и не имеют решений.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений $|x+2|+|x-a|=3a$ и $|x+2|+|x-a|=4-3a$ не имеет решений, а другое имеет два решения. Эти условия равносильны неравенству $\left(3a-|a+2|\right)\left(4-3a-|a+2|\right)<0$. При $a\le -2$ неравенство принимает вид $(4a+2)(6-2a)<0$ и выполняется при любом $a\le -2$. При $a>-2$ неравенство принимает вид $(2a-2)(2-4a)<0$, откуда с учётом условия $a>-2$ получаем $-2<a<\frac{1}{2}$; $a>1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<\frac{1}{2}$ и $a>1$.

Ответ: $a<\frac{1}{2}$; $a>1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0{,}5$ и/или $a=1$	3
В решении верно найдены граничные точки множества значений a ($a=0{,}5$, $a=1$), но неверно определены промежутки значений a. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений a: $a=0{,}5$ или $a=1$. ИЛИ Получено хотя бы одно из уравнений $|x+2|+|x-a|=3a$ или $|x+2|+|x-a|=4-3a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На сайте проводится опрос, кого из 156 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 45. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться на 150 или больше?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Решение.

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 45, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,445 до 0,455. Поскольку всего проголосовало 11 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $11\cdot 0,445 = 4,895$, но меньше $11\cdot 0,455 = 5,005$, то есть равно 5. После того как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $\frac{5}{12} = 0,416\ldots$ Значит, его рейтинг стал равен 42.

б) Пусть за 155 футболистов было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 45, всего 200 голосов. В этом случае 155 футболистов имеют рейтинг 1, а последний — 23; сумма рейтингов равна 178. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 23, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 23, то есть уменьшится на 155.

в) Заметим, что для каждого из 156 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0,5\cdot 156 = 78$. В частности, эта сумма не может превосходить 178.

Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 178. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 178.

Ответ: а) 42; б) да; в) 178.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пункты *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

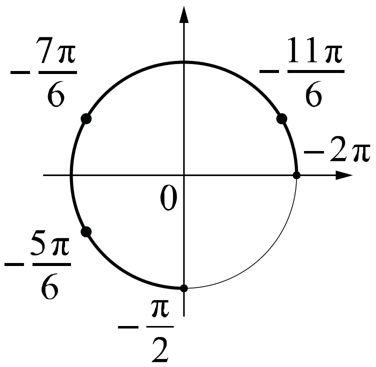
а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,25; \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, следовательно, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

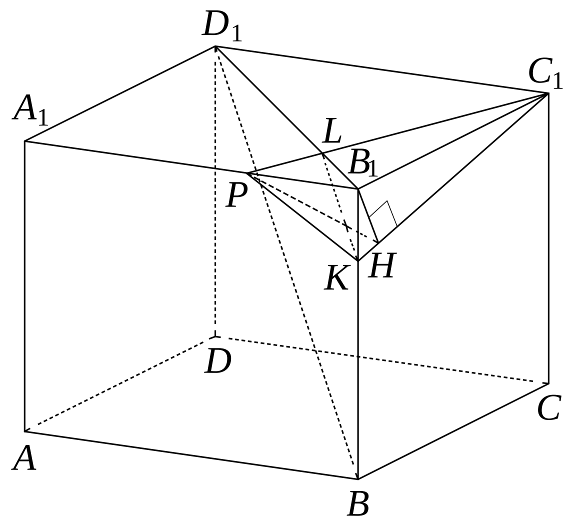
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 2,5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 4:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол между плоскостями α и BB_1C_1.

Решение.



а) В плоскости BDD_1 через точку K проведём прямую, параллельную BD_1, и пересекающую B_1D_1 в точке L. Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P. Плоскость KC_1P проходит через прямую KL, параллельную B_1D_1, поэтому плоскость KC_1P параллельна прямой B_1D_1 по признаку параллельности прямой и плоскости. Значит треугольник KC_1P — сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α.

Так как прямые B_1D_1 и KL параллельны, то $B_1L : LD_1 = B_1K : KB = 1:5$. Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P : D_1C_1 = B_1L : D_1L = 1:5$. Значит, $A_1P : PB_1 = 4:1$.

б) Из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1H на прямую C_1K. По теореме о трёх перпендикулярах прямые PH и C_1K перпендикулярны. Значит, угол B_1HP искомый. Поскольку $A_1P : PB_1 = 4:1$, получаем $PB_1 = \frac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике B_1C_1K имеем

$$B_1H = \frac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \frac{3}{\sqrt{37}}.$$

Значит, $\operatorname{tg} \angle B_1HP = \frac{PB_1}{B_1H} = \frac{\sqrt{37}}{5}$, $\angle B_1HP = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{37}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{37}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б.* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\frac{(4x+5)^2}{x+1} \geq \frac{25+40x+16x^2}{-4-3x+x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{(4x+5)^2}{x+1} - \frac{(4x+5)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0,$$

откуда следует, что $\frac{(4x+5)^2(x-5)}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Получаем: $x = -\frac{5}{4}$, или $-1 < x < 4$, или $x \geq 5$.

Ответ: $\left\{-\frac{5}{4}\right\} \cup (-1;\ 4) \cup [5;\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 27 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

<u>Решение.</u>
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{10S}{11},\ \ldots,\ \frac{2S}{11},\ \frac{S}{11},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r %. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{10kS}{11},\ \ldots,\ \frac{2kS}{11},\ \frac{kS}{11}.$$

Значит, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{11},\ \frac{10(k-1)S+S}{11},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{11},\ \frac{(k-1)S+S}{11}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{10}{11}+\ldots+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}\right)=S\left(1+6(k-1)\right).$$

Общая сумма выплат на 27 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$6(k-1)=0{,}27;\quad k=1{,}045;\quad r=4{,}5.$$

Ответ: 4,5 %.

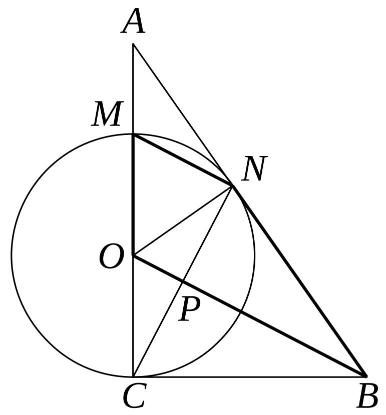
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 12$ и $AM : MC = 4 : 5$.

Решение.



а) Поскольку прямые AC и BC перпендикулярны, прямая BC — касательная к окружности. Прямая BO перпендикулярна прямой CN. Точка N лежит на окружности с диаметром CM, поэтому $\angle CNM = 90°$. Прямые BO и MN перпендикулярны одной и той же прямой CN, следовательно, они параллельны.

б) Пусть

$$AM = 4x,\ MC = 5x.$$

Тогда

$$OC = OM = 2{,}5x,\ OA = 6{,}5x,\ AC = 9x.$$

По свойству секущей и касательной, проведённых из одной точки, $AN^2 = AM \cdot AC$, следовательно, $AN = 6x$.

Поскольку прямые MN и BO параллельны, по теореме Фалеса получаем $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MO} = \frac{8}{5}$, следовательно, $NB = \frac{15}{4}x$. Отрезки BC и BN равны как отрезки касательных, проведённых из одной точки, значит, $BC = \frac{15}{4}x$.

Поскольку $\angle CMN = \angle COB$, прямоугольные треугольники CNM и BCO подобны, следовательно,

$$MN = \frac{CN \cdot CO}{BC} = \frac{12 \cdot 2{,}5x}{3{,}75x} = 8.$$

Из подобия треугольников AMN и AOB следует, что

$$BO = \frac{MN \cdot AO}{AM} = \frac{8 \cdot 6{,}5x}{4x} = 13.$$

Пусть отрезки BO и CN пересекаются в точке P. Тогда P — середина CN и $NP = \frac{1}{2}NC = 6$.

По формуле площади трапеции

$$S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot NP = \frac{13 + 8}{2} \cdot 6 = 63.$$

Ответ: б) 63.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x+5|+|x-a|\right)^2-7\left(|x+5|+|x-a|\right)+4a(7-4a)=0$$

имеет ровно два решения.

<u>Решение.</u>

Пусть $t=|x+5|+|x-a|$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-7t+4a(7-4a)=0$. Решения этого уравнения имеют вид $t=4a$ или $t=7-4a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $|x+5|+|x-a|=4a$ или $|x+5|+|x-a|=7-4a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $|x+5|+|x-a|=b$ в зависимости от a и b. Рассмотрим функцию $f(x)=|x+5|+|x-a|$. При $a\neq -5$ графиком этой функции является ломаная, состоящая из трёх звеньев, угловые коэффициенты которых равны -2, 0 и 2. Минимальное значение достигается на отрезке с концами -5 и a и равно $|a+5|$. Таким образом, уравнение $|x+5|+|x-a|=b$ имеет два решения при $b>|a+5|$, бесконечно много решений при $b=|a+5|$ и не имеет решений при $b<|a+5|$. В случае $a=-5$ уравнение $2|x+5|=b$ имеет два решения при $b>0$, одно решение при $b=0$ и не имеет решений при $b<0$.

Уравнения $|x+5|+|x-a|=4a$ и $|x+5|+|x-a|=7-4a$ могут иметь общие решения при $4a=7-4a$, то есть при $a=\frac{7}{8}$. При $a=\frac{7}{8}$ оба уравнения принимают вид $|x+5|+\left|x-\frac{7}{8}\right|=3{,}5$ и не имеют решений.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений $|x+5|+|x-a|=4a$ и $|x+5|+|x-a|=7-4a$ не имеет решений, а другое имеет два решения. Эти условия равносильны неравенству $\left(4a-|a+5|\right)\left(7-4a-|a+5|\right)<0$. При $a\le -5$ неравенство принимает вид $(5a+5)(12-3a)<0$ и выполняется при любом $a\le -5$. При $a>-5$ неравенство принимает вид $(3a-5)(2-5a)<0$, откуда с учётом условия $a>-5$ получаем $-5<a<\frac{2}{5}$; $a>\frac{5}{3}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<\frac{2}{5}$ и $a>\frac{5}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right)$; $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=\frac{2}{5}$ и/или $a=\frac{5}{3}$	3
В решении верно найдены граничные точки множества значений a ($a=\frac{2}{5}$, $a=\frac{5}{3}$), но неверно определены промежутки значений a. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений a: $a=\frac{2}{5}$ или $a=\frac{5}{3}$. ИЛИ Получено хотя бы одно из уравнений $|x+5|+|x-a|=4a$ или $|x+5|+|x-a|=7-4a$	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На сайте проводится опрос, кого из 146 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.
а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 31. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?
б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться на 140 или больше?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Решение.
а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 31, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,305 до 0,315. Поскольку всего проголосовало 13 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $13 \cdot 0{,}305 = 3{,}965$, но меньше $13 \cdot 0{,}315 = 4{,}095$, то есть равно 4. После того как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $\frac{4}{14} = 0{,}285\ldots$ Значит, его рейтинг стал равен 29.
б) Пусть за 145 футболистов было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 55, всего 200 голосов. В этом случае 145 футболистов имеют рейтинг 1, а последний — 28; сумма рейтингов равна 173. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 28, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 28, то есть уменьшится на 145.
в) Заметим, что для каждого из 146 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0{,}5 \cdot 146 = 73$. В частности, эта сумма не может превосходить 173.
Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 173. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 173.
Ответ: а) 29; б) да; в) 173.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пункты *а* и *б.* ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*