Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12

а) Решите уравнение $4\cos^2 x - 1 = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

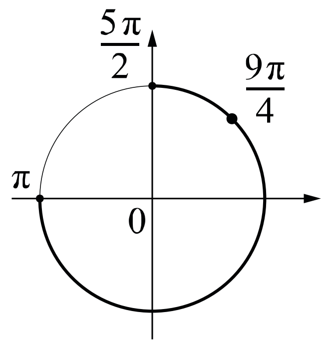
$$4 - 4\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0;\ \left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)\left(2\sqrt{2}\sin x + 3\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Уравнение $\sin x = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим число $\frac{9\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

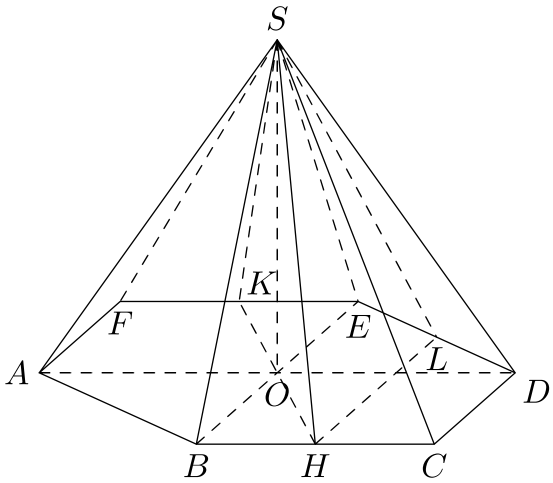
13

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S в грани SBC проведена высота SH, а в грани SEF проведена высота SK.

а) Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости SHK.

б) Найдите угол между прямыми BE и SH, если $SA = 13$, а $BC = 10$.

Решение.



а) Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая SO перпендикулярна плоскости основания, поэтому она перпендикулярна прямой AD. Прямая HK также перпендикулярна прямой AD, по свойству правильного шестиугольника. Поэтому прямая AD перпендикулярна плоскости SHK, содержащей пересекающиеся прямые SO и HK.

б) Через точку H, которая является серединой BC, проведем прямую, параллельную BE. Эта прямая пересекает отрезок DE в точке L, которая является серединой этого отрезка.

Угол между прямыми BE и SH равен углу SHL между прямыми HL и SH.

По теореме Пифагора в треугольнике SBH находим

$$SH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Средняя линия HL трапеции $BEDC$ параллельна её основаниям и равна их полусумме: $HL = \frac{1}{2} \cdot \left(BE + CD\right) = 15$, а $SL = SH = 12$.

В равнобедренном треугольнике SHL находим

$$\cos \angle SHL = \frac{HL}{2 \cdot SH} = \frac{5}{8}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{5}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\dfrac{28}{\left(2^{7-x^2}-4\right)^2}+\dfrac{1}{2^{7-x^2}-4}-2\ge 0$.

__**Решение.**__

Пусть $t=2^{7-x^2}-4$. Неравенство принимает вид:

$$\frac{28}{t^2}+\frac{1}{t}-2\ge 0;\quad \frac{2t^2-t-28}{t^2}\le 0;\quad \frac{(t-4)(2t+7)}{t^2}\le 0,$$

следовательно, $-\dfrac{7}{2}\le t<0;\quad 0<t\le 4$.

При $-\dfrac{7}{2}\le t<0$ имеем:

$$-\frac{7}{2}\le 2^{7-x^2}-4<0;\quad \frac{1}{2}\le 2^{7-x^2}<4;\quad -1\le 7-x^2<2;\quad 5<x^2\le 8,$$

следовательно, $-2\sqrt{2}\le x<-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}<x\le 2\sqrt{2}$.

При $0<t\le 4$ имеем:

$$0<2^{7-x^2}-4\le 4;\quad 4<2^{7-x^2}\le 8;\quad 2<7-x^2\le 3;\quad 4\le x^2<5,$$

следовательно, $-\sqrt{5}<x\le -2;\quad 2\le x<\sqrt{5}$.

Решение неравенства:

$$-2\sqrt{2}\le x<-\sqrt{5},\quad -\sqrt{5}<x\le -2,\quad 2\le x<\sqrt{5},\quad \sqrt{5}<x\le 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left[-2\sqrt{2};-\sqrt{5}\right)$; $\left(-\sqrt{5};-2\right]$; $\left[2;\sqrt{5}\right)$; $\left(\sqrt{5};2\sqrt{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением одной из точек: $-2\sqrt{2}$, -2, 2 или $2\sqrt{2}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна сумма всех платежей после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж будет составлять 475 000 рублей?

<u>Решение.</u>
Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5,\ \frac{5(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{5\cdot 2}{n},\ \frac{5}{n},\ 0.$$

По условию каждый январь долг будет возрастать на 14 %. Найдём значения долга (в млн рублей) к концу каждого января:

$$5{,}7,\quad \frac{5{,}7(n-1)}{n},\ \ldots,\quad \frac{5{,}7\cdot 2}{n},\quad \frac{5{,}7}{n}.$$

Значит, платежи (в млн рублей) должны быть следующими:

$$0{,}7+\frac{5}{n},\ \frac{0{,}7(n-1)+5}{n},\ \ldots,\ \frac{0{,}7\cdot 2+5}{n},\ \frac{0{,}7+5}{n}.$$

Получаем $\frac{5{,}7}{n}=0{,}475$, откуда находим $n=12$. Сумма всех платежей будет равна

$$5+0{,}7\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=5+0{,}7\cdot\frac{13}{2}=9{,}55 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 9,55 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

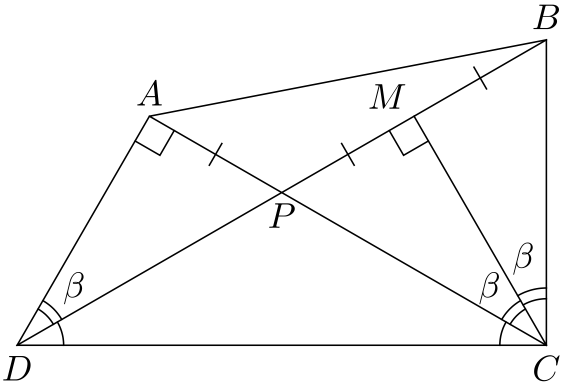
16 Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что угол DAC равен $90°$, а угол ACB в 2 раза больше угла ADB. Сумма угла DBC и удвоенного угла ADC равна 180°.

а) Докажите, что $BP = 2AP$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 8$ и точка P является серединой диагонали BD.

__**Решение.**__

а) Пусть биссектриса угла PCB пересекает отрезок PB в точке M. Обозначим буквой β угол ADB. Получаем, что $\angle ADB = \angle PCM = \angle BCM = \beta$.



Так как $\angle APD = \angle BPC$ по свойству вертикальных углов, треугольники APD и MPC подобны, поэтому $\angle PMC = 90°$. Таким образом, в треугольнике BCP биссектриса CM является высотой, а значит, треугольник BCP равнобедренный и $PM = MB$, $CP = CB$.

В треугольнике DBC: $\angle DBC + 2\beta + \angle PCD + \angle PDC = 180°$. Из этого равенства и из того, что $\angle DBC + 2\angle ADC = 180°$, следует, что $\angle PCD = \angle PDC$. Поэтому треугольник PCD равнобедренный и $PD = PC$.

Значит, треугольники APD и MPC равны, поэтому $AP = PM = \frac{1}{2}PB$, откуда следует, что $BP = 2AP$.

б) Точка P является серединой отрезка BD, поэтому $PD = PB = PC = BC = 4$. Отсюда следует, что треугольник BCP равносторонний, поэтому $\angle BPC = 60°$.

Из равенства $AP = \frac{1}{2}PB$ получаем, что $AP = 2$ и $AC = 2 + 4 = 6$.

Теперь найдём площадь четырёхугольника $ABCD$:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AC\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}4^{ax}\cdot 2^{x^2}<7^{-(x+2a)},\\ 2x^3+x^2+x<2a^3+a^2+a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-2;1]$.

<u>Решение.</u>

Запишем второе неравенство в виде

$$2x^3+x^2+x-2a^3-a^2-a<0$$

и преобразуем левую часть:

$2\left(x^3-a^3\right)+\left(x^2-a^2\right)+x-a<0$, откуда $(x-a)\left(2x^2+(1+2a)x+2a^2+a+1\right)<0.$

Дискриминант трёхчлена $2x^2+(1+2a)x+2a^2+a+1$ равен

$$(1+2a)^2-8\left(2a^2+a+1\right)=-12a^2-4a-7=-8a^2-(2a+1)^2-6.$$

Это выражение отрицательно при любом значении a, следовательно, выражение $2x^2+(1+2a)x+2a^2+a+1$ принимает только положительные значения при любых значениях x и a. Таким образом, второе неравенство системы равносильно неравенству

$$x<a.$$

Преобразуем первое неравенство:

$$\log_2\left(4^{ax}\cdot 2^{x^2}\right)<\log_2\left(7^{-(x+2a)}\right);$$

$$x^2+2ax<-(x+2a)\log_2 7;$$

$$(x+2a)(x+\log_2 7)<0.$$

Если $-2a=-\log_2 7$, то неравенство $(x+2a)(x+\log_2 7)<0$ не имеет решений.

Если $-2a<-\log_2 7$, то $-2a<x<-\log_2 7<-2$ и на отрезке $[-2;1]$ решений нет.

Если $-2a>-\log_2 7$, то получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}-\log_2 7<x<-2a,\\ x<a.\end{cases}$$

Чтобы на отрезке $[-2;1]$ было решение, нужно, чтобы наименьшее из чисел a и $-2a$ было больше чем -2:

$$\begin{cases}a>-2,\\ -2a>-2;\end{cases} \text{ откуда } -2<a<1.$$

Ответ: $(-2;1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-2$ и / или $a=1$	3
Задача сведена к исследованию решений системы неравенств $(x+2a)(x+\log_2 7)<0$ и $x<a$ в зависимости от значений a, и хотя бы один из случаев исследован верно ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Решение неравенства $\log_2\left(4^{ax}\cdot 2^{x^2}\right)<\log_2\left(7^{-(x+2a)}\right)$ сведено к исследованию решений неравенства $(x+2a)(x+\log_2 7)<0$ в зависимости от значений a или решение неравенства $2x^3+x^2+x-2a^3-a^2-a<0$ сведено к исследованию решений неравенства $x<a$ в зависимости от значений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $\left[\sqrt{2}\right]=1$ и $[-3{,}4]=-4$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\sqrt{n+2}\right]\cdot\left[\sqrt{n-2}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\sqrt{n+35}\right]\cdot\left[\sqrt{n-34}\right]=n$?

в) Найдите все натуральные числа n, для которых $\left[\sqrt{n+75}\right]\cdot\left[\sqrt{n-74}\right]=n$.

Решение.

а) Нет, поскольку $\left[\sqrt{n+2}\right]\cdot\left[\sqrt{n-2}\right]\le\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n-2}=\sqrt{n^2-4}<n$.

б) Да. Например, если $n=35\cdot34=1190$, то

$$\left[\sqrt{n+35}\right]=\left[\sqrt{35\cdot34+35}\right]=\left[\sqrt{35^2}\right]=[35]=35,$$

$$\left[\sqrt{n-34}\right]=\left[\sqrt{35\cdot34-34}\right]=\left[\sqrt{34^2}\right]=[34]=34.$$

Поэтому

$$\left[\sqrt{n+35}\right]\cdot\left[\sqrt{n-34}\right]=35\cdot34=n.$$

в) Оценим левую часть уравнения:

$$n=\left[\sqrt{n+75}\right]\cdot\left[\sqrt{n-74}\right]\le\sqrt{n+75}\cdot\sqrt{n-74}=\sqrt{n^2+n-75\cdot74}.$$

Значит, должно выполняться неравенство $n^2\le n^2+n-75\cdot74$, откуда следует, что $n\ge75\cdot74=5550$.

Если $n=75\cdot74=5550$, то $\left[\sqrt{n+75}\right]\cdot\left[\sqrt{n-74}\right]=\left[\sqrt{75^2}\right]\cdot\left[\sqrt{74^2}\right]=n$.

Покажем, что других искомых чисел не существует. Предположим, что существует решение $n>5550$.

Если $\left[\sqrt{n+75}\right]=\left[\sqrt{n+74}\right]$, то $n=\left[\sqrt{n+75}\right]\cdot\left[\sqrt{n-74}\right]=$
$=\left[\sqrt{n+74}\right]\cdot\left[\sqrt{n-74}\right]\le\sqrt{n+74}\cdot\sqrt{n-74}=\sqrt{n^2-74^2}<n$. Противоречие.

Если $\left[\sqrt{n+75}\right]>\left[\sqrt{n+74}\right]$, то $\sqrt{n+75}$ — некоторое натуральное число k. Тогда

$$n=\left[\sqrt{n+75}\right]\cdot\left[\sqrt{n-74}\right]=k\left[\sqrt{n+75-149}\right]=k\cdot\left[\sqrt{k^2-149}\right].$$

Значит, k^2-75 делится на k. Следовательно, 75 делится на k, и поэтому $k\le75$. Значит, $\sqrt{n+75}\le75$, и, таким образом, $n\le75^2-75=5550$. Противоречие.

Ответ: а) Нет; б) да; в) 5550.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12

а) Решите уравнение $2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

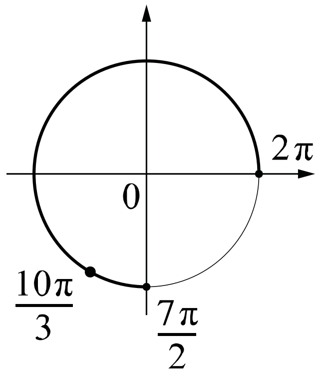
$$2-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+1=0;\ \left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z$.

Уравнение $\sin x=\sqrt{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим число $\frac{10\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z$; б) $\frac{10\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

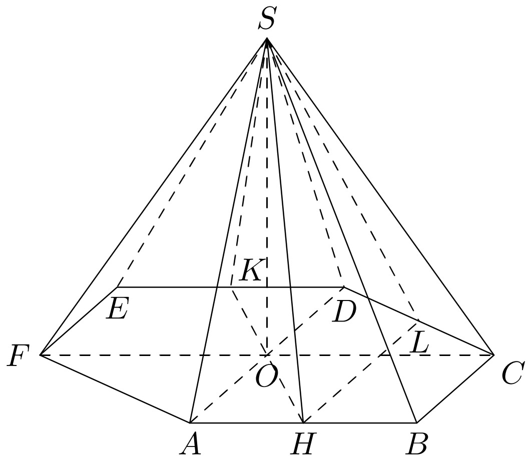
13

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S в грани SAB проведена высота SH, а в грани SDE проведена высота SK.

а) Докажите, что прямая CF перпендикулярна плоскости SHK.

б) Найдите угол между прямыми AD и SH, если $SA=25$, а $AB=14$.

<u>Решение.</u>



Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая SO перпендикулярна плоскости основания, поэтому она перпендикулярна прямой AD. Прямая HK также перпендикулярна прямой AD, по свойству правильного шестиугольника. Поэтому прямая AD перпендикулярна плоскости SHK, содержащей пересекающиеся прямые SO и HK.

б) Через точку H, которая является серединой BC, проведем прямую, параллельную BE. Эта прямая пересекает отрезок DE в точке L, которая является серединой этого отрезка.

Угол между прямыми BE и SH равен углу SHL между прямыми HL и SH.

По теореме Пифагора в треугольнике SAH находим

$$SH = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Средняя линия HL трапеции $ABCD$ параллельна её основаниям и равна их полусумме: $HL = \frac{1}{2} \cdot \left(AD + BC\right) = 21$, а $SL = SH = 24$.

В равнобедренном треугольнике SHL находим

$$\cos \angle SHL = \frac{HL}{2 \cdot SH} = \frac{7}{16}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{7}{16}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14

Решите неравенство $\dfrac{14}{\left(4^{5-x^2}-2\right)^2}+\dfrac{1}{4^{5-x^2}-2}-4\ge 0$.

Решение.

Пусть $t=4^{5-x^2}-2$. Неравенство принимает вид:

$$\frac{14}{t^2}+\frac{1}{t}-4\ge 0;\quad \frac{4t^2-t-14}{t^2}\le 0;\quad \frac{(t-2)(4t+7)}{t^2}\le 0,$$

следовательно, $-\dfrac{7}{4}\le t<0$; $0<t\le 2$.

При $-\dfrac{7}{4}\le t<0$ имеем:

$$-\frac{7}{4}\le 4^{5-x^2}-2<0;\quad \frac{1}{4}\le 4^{5-x^2}<2;\quad -1\le 5-x^2<\frac{1}{2};\quad 4{,}5<x^2\le 6,$$

следовательно, $-\sqrt{6}\le x<-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ или $\dfrac{3}{\sqrt{2}}<x\le\sqrt{6}$.

При $0<t\le 2$ имеем:

$$0<4^{5-x^2}-2\le 2;\quad 2<4^{5-x^2}\le 4;\quad \frac{1}{2}<5-x^2\le 1;\quad 4<x^2\le 4{,}5,$$

следовательно, $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}<x\le -2$ или $2\le x<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Решение неравенства:

$$-\sqrt{6}\le x<-\frac{3}{\sqrt{2}},\quad -\frac{3}{\sqrt{2}}<x\le -2,\ 2\le x<\frac{3}{\sqrt{2}},\quad \frac{3}{\sqrt{2}}<x\le\sqrt{6}.$$

Ответ: $\left[-\sqrt{6};-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right);\ \left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}};-2\right];\ \left[2;\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right);\ \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\sqrt{6}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением одной из точек: $-\sqrt{6}$, -2, 2 или $\sqrt{6}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна сумма всех платежей после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж будет составлять 575 000 рублей?

<u>Решение.</u>

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$4,\ \frac{4(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{4\cdot 2}{n},\ \frac{4}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг будет возрастать на 15 %. Найдём значения долга (в млн рублей) на конец каждого января:

$$4{,}6,\quad \frac{4{,}6(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{4{,}6\cdot 2}{n},\quad \frac{4{,}6}{n}.$$

Значит, платежи (в млн рублей) должны быть следующими:

$$0{,}6+\frac{4}{n},\quad \frac{0{,}6(n-1)+4}{n},\ \ldots,\ \frac{0{,}6\cdot 2+4}{n},\quad \frac{0{,}6+4}{n}.$$

Получаем $\frac{4{,}6}{n}=0{,}575$, откуда находим $n=8$. Сумма всех платежей будет равна

$$4+0{,}6\left(1+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\right)=4+0{,}6\cdot\frac{9}{2}=6{,}7 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 6,7 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

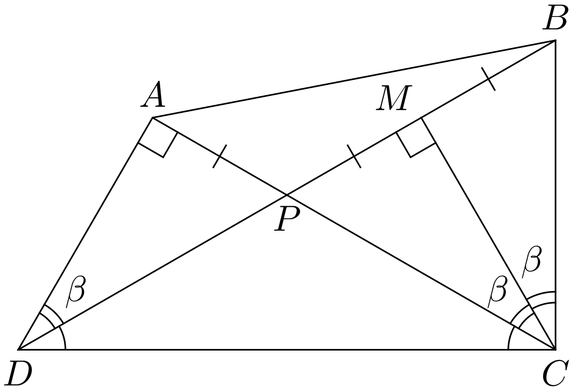
16 Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что угол DAC равен $90°$, а угол ACB в 2 раза больше угла ADB. Сумма угла DBC и удвоенного угла ADC равна 180°.

а) Докажите, что $BP = 2AP$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 16$ и точка P является серединой диагонали BD.

<u>Решение.</u>

а) Пусть биссектриса угла PCB пересекает отрезок PB в точке M. Обозначим буквой β угол ADB. Получаем, что $\angle ADB = \angle PCM = \angle BCM = \beta$.



Так как $\angle APD = \angle BPC$ по свойству вертикальных углов, треугольники APD и MPC подобны, поэтому $\angle PMC = 90°$. Таким образом, в треугольнике BCP биссектриса CM является высотой, а значит, треугольник BCP — равнобедренный и $PM = MB$, $CP = CB$.

В треугольнике DBC: $\angle DBC + 2\beta + \angle PCD + \angle PDC = 180°$. Из этого равенства и из того, что $\angle DBC + 2\angle ADC = 180°$, следует, что $\angle PCD = \angle PDC$. Поэтому треугольник PCD равнобедренный и $PD = PC$.

Значит, треугольники APD и MPC равны, поэтому $AP = PM = \frac{1}{2}PB$, откуда следует, что $BP = 2AP$.

б) Точка P является серединой отрезка BD, поэтому $PD = PB = PC = BC = 8$. Отсюда следует, что треугольник BCP равносторонний, поэтому $\angle BPC = 60°$.

Из равенства $AP = \frac{1}{2}PB$ получаем, что $AP = 4$ и $AC = 4 + 8 = 12$.

Теперь найдём площадь четырёхугольника $ABCD$:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AC\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=48\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $48\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}25^{ax+x}\cdot 5^{x^2}<7^{-(x+2a+2)},\\ 2x^3+x^2+2x<2a^3+a^2+2a\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;2]$.

<u>Решение.</u>

Запишем второе неравенство в виде

$$2x^3+x^2+2x-2a^3-a^2-2a<0$$

и преобразуем левую часть:

$$2\left(x^3-a^3\right)+\left(x^2-a^2\right)+2(x-a)<0,\text{ откуда}$$

$$(x-a)\left(2x^2+(1+2a)x+2a^2+a+2\right)<0.$$

Дискриминант трёхчлена $2x^2+(1+2a)x+2a^2+a+2$ равен

$$(1+2a)^2-8\left(2a^2+a+2\right)=-12a^2-4a-15=-8a^2-(2a+1)^2-14.$$

Это выражение отрицательно при любом значении a, следовательно, выражение $2x^2+(1+2a)x+2a^2+a+2$ принимает только положительные значения при любых значениях x и a. Таким образом, второе неравенство системы равносильно неравенству $x<a$.

Преобразуем первое неравенство:

$$\log_5\left(25^{ax+x}\cdot 5^{x^2}\right)<\log_5\left(7^{-(x+2a+2)}\right),$$

$$x^2+2ax+2x<-(x+2a+2)\log_5 7,$$

$$(x+2a+2)(x+\log_5 7)<0.$$

Если $-2a-2=-\log_5 7$, то неравенство $(x+2a+2)(x+\log_5 7)<0$ не имеет решений.

Если $-2a-2<-\log_5 7$, то $-2a-2<x<-\log_5 7<-1$ и на отрезке $[-1;2]$ решений нет.

Если $-2a-2>-\log_5 7$, то получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}-\log_5 7<x<-2a-2,\\ x<a.\end{cases}$$

Чтобы на отрезке $[-1;2]$ нашлось решение, нужно, чтобы наименьшее из чисел a и $-2a-2$ было больше чем -1:

$$\begin{cases}a>-1,\\ -2a-2>-1;\end{cases}\text{ откуда } -1<a<-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-1$ и / или $a=-\frac{1}{2}$	3
Задача сведена к исследованию решений системы неравенств $(x+2a+2)(x+\log_5 7)<0$ и $x<a$ в зависимости от значений a, и хотя бы один из случаев исследован верно ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Решение неравенства $\log_5\left(25^{ax+x}\cdot 5^{x^2}\right)<\log_5\left(7^{-(x+2a+2)}\right)$ сведено к исследованию решений неравенства $(x+2a+2)(x+\log_5 7)<0$ в зависимости от значений a или решение неравенства $2x^3+x^2+2x-2a^3-a^2-2a<0$ сведено к исследованию решений неравенства $x<a$ в зависимости от значений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18 Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $\left[\sqrt{2}\right]=1$ и $[-3{,}4]=-4$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\sqrt{n+1}\right]\cdot\left[\sqrt{n-1}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\sqrt{n+25}\right]\cdot\left[\sqrt{n-24}\right]=n$?

в) Найдите все натуральные числа n, для которых $\left[\sqrt{n+65}\right]\cdot\left[\sqrt{n-64}\right]=n$.

<u>Решение.</u>

а) Нет, поскольку $\left[\sqrt{n+1}\right]\cdot\left[\sqrt{n-1}\right]\le\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}=\sqrt{n^2-1}<n$.

б) Да. Например, если $n=600=24\cdot25$, то

$$\left[\sqrt{n+25}\right]=\left[\sqrt{25\cdot24+25}\right]=\left[\sqrt{25^2}\right]=[25]=25,$$

$$\left[\sqrt{n-24}\right]=\left[\sqrt{25\cdot24-25}\right]=\left[\sqrt{24^2}\right]=[24]=24.$$

Поэтому

$$\left[\sqrt{n+25}\right]\cdot\left[\sqrt{n-24}\right]=25\cdot24=n.$$

в) Оценим левую часть уравнения:

$$\left[\sqrt{n+65}\right]\cdot\left[\sqrt{n-64}\right]\le\sqrt{n+65}\cdot\sqrt{n-64}=\sqrt{n^2+n-64\cdot65}.$$

Значит, должно выполняться неравенство $n^2\le n^2+n-65\cdot64$, откуда следует, что $n\ge64\cdot65=4160$.

Если $n=65\cdot64=4160$, то $\left[\sqrt{n+65}\right]\cdot\left[\sqrt{n-64}\right]=\left[\sqrt{65^2}\right]\cdot\left[\sqrt{64^2}\right]=n$.

Покажем, что других решений не существует. Предположим, что существует решение $n>4160$.

Если $\left[\sqrt{n+65}\right]=\left[\sqrt{n+64}\right]$, то $n=\left[\sqrt{n+65}\right]\cdot\left[\sqrt{n-64}\right]=$

$=\left[\sqrt{n+64}\right]\cdot\left[\sqrt{n-64}\right]\le\sqrt{n+64}\cdot\sqrt{n-64}=\sqrt{n^2-64^2}<n$.

Противоречие.

Если $\left[\sqrt{n+65}\right]>\left[\sqrt{n+64}\right]$, то $\sqrt{n+65}$ — некоторое натуральное число k.

Тогда

$$n=\left[\sqrt{n+65}\right]\cdot\left[\sqrt{n-64}\right]=k\left[\sqrt{n+65-129}\right]=k\left[\sqrt{k^2-129}\right].$$

Значит, k^2-65 делится на k. Следовательно, 65 делится на k, и поэтому $k\le65$. Значит, $\sqrt{n+65}\le65$, и, таким образом, $n\le65^2-65=4160$. Противоречие.

Ответ: а) Нет; б) да; в) 4160.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*