Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

<u>Решение.</u>

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0, \\ 2\cos x+\sqrt{3}\neq 0. \end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем

$$y(y+1)=0, \text{ откуда } y=0 \text{ или } y=-1.$$

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

При $\sin x=\dfrac{1}{2}$ находим

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \text{ или } x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k, n\in\mathbb{Z}.$$

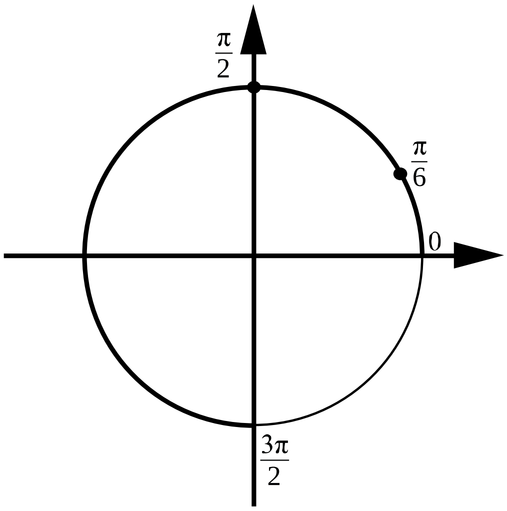
Числа $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, не удовлетворяют условию $\cos x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

При $\sin x=1$ находим

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Получим $x=\dfrac{\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

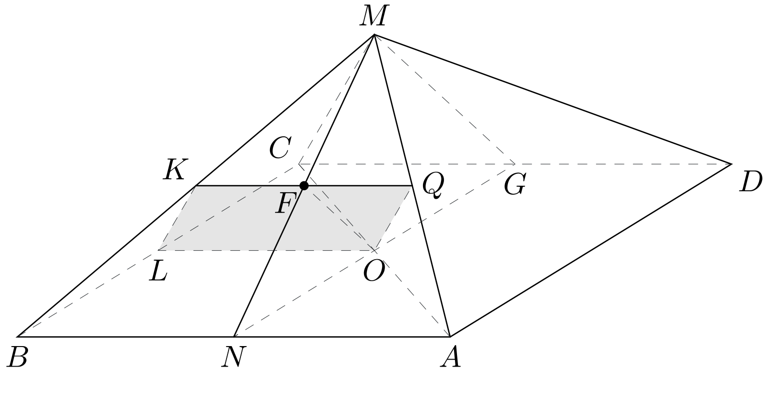
14 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ известна сторона квадрата $ABCD$, лежащего в основании, — она равна 8. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение треугольной пирамиды $MABC$ плоскостью α является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

Решение.

а) Пусть точка Q — середина ребра MA, а точка K — середина ребра MB. Плоскость α пересекает плоскость BMC по отрезку KL, параллельному ребру MC. По условию плоскость α пересекает плоскость AMC по прямой, параллельной ребру MC. На этой прямой лежит средняя линия треугольника AMC, поэтому плоскость α проходит через точку O — середину отрезка AC. Таким образом, сечение — четырёхугольник $QKLO$, в котором стороны KL и QO параллельны отрезку MC и равны его половине. Значит, $QKLO$ — параллелограмм.



б) Отметим точку F в середине отрезка QK и рассмотрим плоскость MFO. Прямая QK перпендикулярна прямым FM и MO, следовательно, прямая QK перпендикулярна плоскости MFO, а поэтому прямая QK перпендикулярна отрезку OF. Таким образом, отрезок OF служит высотой параллелограмма $QKLO$.

Сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью MOF — прямоугольный равнобедренный треугольник NMG (см. рисунок), поскольку по условию грани CMD и AMB перпендикулярны. Отрезок OF является медианой прямоугольного треугольника MON, проведённой к его гипотенузе MN, поэтому

$$OF=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Тогда площадь параллелограмма $QKLO$ равна $OL\cdot OF=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Ответ: б) $8\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $5^{\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}}<1$.

<u>Решение.</u>

Запишем исходное неравенство в виде $5^{\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}}<5^0$; $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

Случай $x\geq 0$:

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+9}<0;\quad \frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)^2}<0,$$

откуда $2<x<3$ или $3<x<5$.

Случай $x<0$:

$$\frac{x^2+7x+10}{x^2-6x+9}<0;\quad \frac{(x+2)(x+5)}{(x-3)^2}<0,$$

откуда $-5<x<-2$.

Ответ: $(-5;-2)$; $(2;3)$; $(3;5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол ABC на три равные части.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 6\sqrt{21}$.

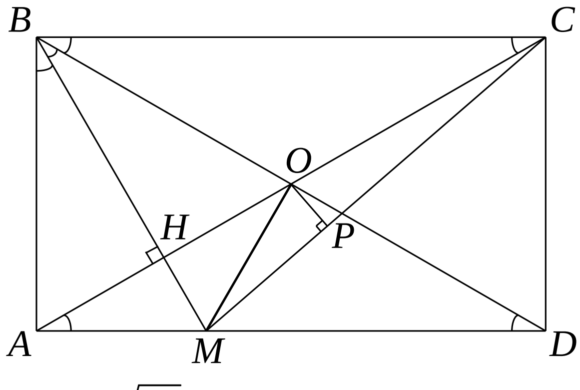
Решение.

а) Обозначим $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM = \angle BDM = \angle CBD = \alpha$.

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle ACB = \alpha$.

Следовательно, $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$.



б) Имеем $AB = BC\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{7}$;

$AM = AB\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{21}$; $\quad MD = AD - AM = 6\sqrt{21} - 2\sqrt{21} = 4\sqrt{21}$.

Из прямоугольного треугольника CMD находим, что

$MC=\sqrt{CD^2+MD^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{21}\right)^2+\left(6\sqrt{7}\right)^2}=14\sqrt{3}$.

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM. Имеем

$$S_{OCM}=\frac{1}{2}S_{ACM}=\frac{1}{4}AM\cdot AB=\frac{1}{2}CM\cdot OP;\quad OP=\frac{AM\cdot AB}{2MC}=\frac{2\sqrt{21}\cdot 6\sqrt{7}}{2\cdot 14\sqrt{3}}=3.$$

Ответ: б) 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Василий взял кредит в банке на срок 14 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 8 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Василием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Василием банку?

Решение.

Пусть сумма кредита равна *S*. По условию долг перед банком по состоянию на конец месяца должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\quad \frac{13}{14}S;\quad \ldots;\quad \frac{2}{14}S;\quad \frac{1}{14}S;\quad 0.$$

В конце каждого месяца долг возрастает на 8 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию перед ежемесячными выплатами такова:

$$1{,}08S;\quad 1{,}08\cdot\frac{13}{14}S;\quad \ldots;\quad 1{,}08\cdot\frac{2}{14}S;\quad 1{,}08\cdot\frac{1}{14}S.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}08S+\frac{1}{14}S;\quad \frac{13\cdot 0{,}08+1}{14}S;\quad \ldots;\quad \frac{2\cdot 0{,}08+1}{14}S;\quad \frac{0{,}08+1}{14}S.$$

Всего следует выплатить

$$S+0{,}08S\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{1}{14}\right)=S\left(1+\frac{15\cdot 0{,}08}{2}\right)=1{,}6S.$$

Значит, общая сумма выплат составляет 160 % от суммы кредита.

Ответ: 160 %.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2-3+\sqrt{2x+a}\right)^2=\left(x^2-3\right)^2+2x+a$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.

Решение.

Уравнение $\left(x^2-3+\sqrt{2x+a}\right)^2=\left(x^2-3\right)^2+2x+a$ равносильно уравнению $\left(x^2-3\right)\sqrt{2x+a}=0$.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а второй имеет смысл.

Уравнение $x^2-3=0$ имеет единственное решение $x=\sqrt{3}$ на отрезке $[0;2]$.

Выражение $\sqrt{2\sqrt{3}+a}$ имеет смысл при $a\ge -2\sqrt{3}$, значит, при $a\ge -2\sqrt{3}$ число $x=\sqrt{3}$ является решением уравнения $\left(x^2-3\right)\sqrt{2x+a}=0$.

Уравнение $\sqrt{2x+a}=0$ имеет единственное решение $x=-\frac{a}{2}$ на отрезке $[0;2]$ при $-4\le a\le 0$. Выражение x^2-3 имеет смысл при всех значениях x.

Решения $x=\sqrt{3}$ и $x=-\dfrac{a}{2}$ уравнения $\left(x^2-3\right)\sqrt{2x+a}=0$ совпадают при $a=-2\sqrt{3}$.

Поскольку $-4<-2\sqrt{3}$, уравнение $\left(x^2-3+\sqrt{2x+a}\right)^2=\left(x^2-3\right)^2+2x+a$ имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$ при $-4\le a\le -2\sqrt{3}$ или $a>0$.

Ответ: $\left[-4;-2\sqrt{3}\right]$; $(0;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 34, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 9 до 20 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 1, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 59 до 92 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

а) Пусть стирали следующие пары чисел: 9 и 19, 10 и 15, 11 и 16, 12 и 17, 13 и 18. Тогда на доске останутся числа 14 и 20, сумма которых равна 34.

б) Среди чисел от 59 до 92 ровно 6 чисел, дающих при делении на 5 остаток 3, и ровно по 7 чисел, дающих при делении на 5 четыре других возможных остатка. Следовательно, среди квадратов чисел от 59 до 92 ровно 7 чисел, делящихся на 5, ровно 13 чисел, дающих при делении на 5 остаток 4, и ровно 14 чисел, дающих при делении на 5 остаток 1. По условию каждый раз с доски стирали два числа, разность которых делится на 5. Значит, в каждой из пар стёртых чисел оба числа дают одинаковый остаток при делении на 5. Поэтому на доске обязательно останется число, делящееся на 5, и число, которое при делении на 5 даёт остаток 4. Произведение этих чисел делится на 5 и, следовательно, не может оканчиваться на цифру 1.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 5, а второе даёт при делении на 5 остаток 4. Первое из этих чисел не меньше 60^2 и не больше 90^2, второе — не меньше 62^2 и не больше 92^2. Поэтому если первое из этих чисел поделить на второе, то получится не больше $\left(\frac{90}{62}\right)^2$, а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше $\left(\frac{92}{60}\right)^2$. Поскольку $\left(\frac{92}{60}\right)^2 > \left(\frac{90}{62}\right)^2$, получаем, что наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит $\left(\frac{92}{60}\right)^2$.

На доске могли остаться числа 92^2 и 60^2, так как остальные квадраты чисел от 59 до 92 можно разбить на такие пары: 3 пары чисел, делящихся на 5, 7 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 1, и 6 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 4. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно $\left(\frac{92}{60}\right)^2 = \left(\frac{23}{15}\right)^2$.

Ответ: а) Может; б) не может; в) $\left(\frac{23}{15}\right)^2$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0,\\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем

$$y\left(y+1\right)=0,\ \text{откуда}\ y=0\ \text{или}\ y=-1.$$

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

При $\sin x=\dfrac{1}{2}$ находим

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k\ \text{ или }\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \ k,n\in\mathbb{Z}.$$

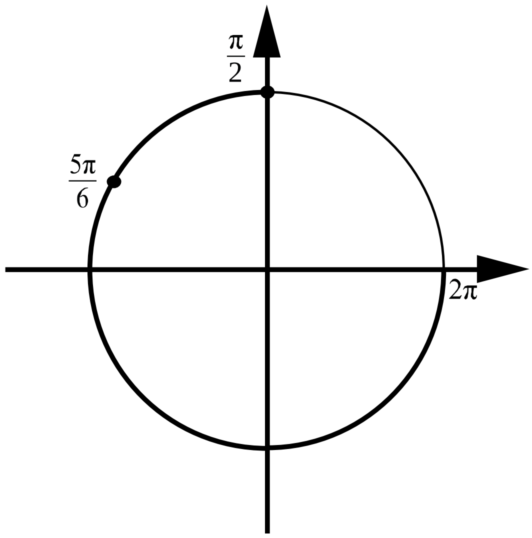
Числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, не удовлетворяют условию $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

При $\sin x=1$ находим

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ \ m\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

Получим $x=\dfrac{5\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

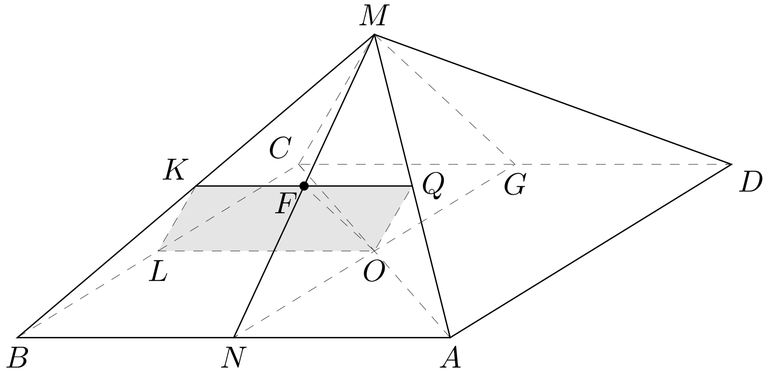
14 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ известна сторона квадрата $ABCD$, лежащего в основании, — она равна 6. $MABC$ Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α, параллельная ребру MC.

а) Докажите, что сечение треугольной пирамиды $MABC$ плоскостью α является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α.

Решение.

а) Пусть точка Q — середина ребра MA, а точка K — середина ребра MB. Плоскость α пересекает плоскость BMC по отрезку KL, параллельному ребру MC. По условию плоскость α пересекает плоскость AMC по прямой, параллельной ребру MC. На этой прямой лежит средняя линия треугольника AMC, поэтому плоскость α проходит через точку O — середину отрезка AC. Таким образом, сечение — четырёхугольник $QKLO$, в котором стороны KL и QO параллельны отрезку MC и равны его половине. Значит, $QKLO$ — параллелограмм.



б) Отметим точку F в середине отрезка QK и рассмотрим плоскость MFO. Прямая QK перпендикулярна прямым FM и MO, следовательно, прямая QK перпендикулярна плоскости MFO, а поэтому прямая QK перпендикулярна отрезку OF. Таким образом, отрезок OF служит высотой параллелограмма $QKLO$.

Сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью MOF — прямоугольный равнобедренный треугольник NMG (см. рисунок), поскольку по условию грани CMD и AMB перпендикулярны. Отрезок OF является медианой прямоугольного треугольника MON, проведённой к его гипотенузе MN, поэтому

$$OF=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда площадь параллелограмма $QKLO$ равна $OL\cdot OF=3\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $4^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25}}<1$.

<u>Решение.</u>

Запишем исходное неравенство в виде $4^{\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25}}<4^0$; $\frac{x^2-7|x|+6}{x^2-10x+25}<0$.

Случай $x\geq 0$:

$$\frac{x^2-7x+6}{x^2-10x+25}<0;\quad \frac{(x-1)(x-6)}{(x-5)^2}<0,$$

откуда $1<x<5$ или $5<x<6$.

Случай $x<0$:

$$\frac{x^2+7x+6}{x^2-10x+25}<0;\quad \frac{(x+1)(x+6)}{(x-5)^2}<0,$$

откуда $-6<x<-1$.

Ответ: $(-6;-1)$; $(1;5)$; $(5;6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30°$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

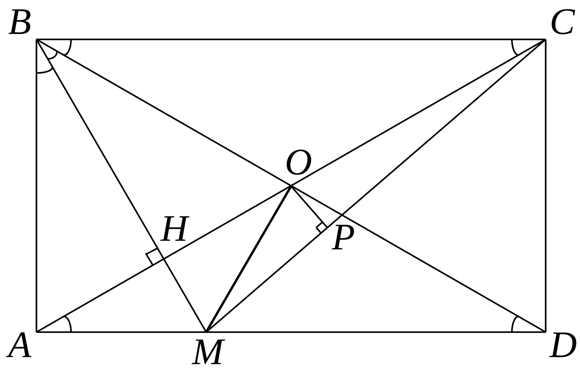
Решение.

а) Обозначим $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM = \angle BDM = \angle CBD = \alpha$.

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle ACB = \alpha$.

Следовательно, $\angle ABM = \angle DBM = \angle DBC = \dfrac{1}{3}\cdot 90° = 30°$.



б) Имеем $AB = BC\operatorname{tg}30° = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$;

$$AM = AB\operatorname{tg}30° = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3; \quad MD = AD - AM = 9 - 3 = 6.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим, что

$$MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}.$$

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM. Имеем

$$S_{OCM}=\frac{1}{2}S_{ACM}=\frac{1}{4}AM\cdot AB=\frac{1}{2}CM\cdot OP;\ OP=\frac{AM\cdot AB}{2\cdot MC}=\frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Геннадий взял кредит в банке на срок 17 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 9 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Геннадием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Геннадием банку?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на конец месяца должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\quad \frac{16}{17}S;\quad \ldots;\quad \frac{2}{17}S;\quad \frac{1}{17}S;\quad 0.$$

В конце каждого месяца долг возрастает на 9 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию перед ежемесячными выплатами такова:

$$1{,}09S;\quad 1{,}09\cdot\frac{16}{17}S;\quad \ldots;\quad 1{,}09\cdot\frac{2}{17}S;\quad 1{,}09\cdot\frac{1}{17}S.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}09S+\frac{1}{17}S;\quad \frac{16\cdot 0{,}09+1}{17}S;\quad \ldots;\quad \frac{2\cdot 0{,}09+1}{17}S;\quad \frac{0{,}09+1}{17}S.$$

Всего следует выплатить

$$S+0{,}09S\left(1+\frac{16}{17}+\ldots+\frac{1}{17}\right)=S\left(1+\frac{18\cdot 0{,}09}{2}\right)=1{,}81S.$$

Значит, общая сумма выплат составляет 181 % от суммы кредита.
Ответ: 181 %.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2-7+\sqrt{2x-a}\right)^2=\left(x^2-7\right)^2+2x-a$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;3]$.

Решение.

Уравнение $\left(x^2-7+\sqrt{2x-a}\right)^2=\left(x^2-7\right)^2+2x-a$ равносильно уравнению $\left(x^2-7\right)\sqrt{2x-a}=0$.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а второй имеет смысл.

Уравнение $x^2-7=0$ имеет единственное решение $x=\sqrt{7}$ на отрезке $[0;3]$. Выражение $\sqrt{2\sqrt{7}-a}$ имеет смысл при $a\le 2\sqrt{7}$, значит, при $a\le 2\sqrt{7}$ число $x=\sqrt{7}$ является решением уравнения $\left(x^2-7\right)\sqrt{2x-a}=0$.

Уравнение $\sqrt{2x-a}=0$ имеет единственное решение $x=\frac{a}{2}$ на отрезке $[0;3]$ при $0\le a\le 6$. Выражение x^2-7 имеет смысл при всех значениях x.

Решения $x=\sqrt{7}$ и $x=\frac{a}{2}$ уравнения $\left(x^2-7\right)\sqrt{2x-a}=0$ совпадают при $a=2\sqrt{7}$.

Поскольку $2\sqrt{7}<6$, уравнение $\left(x^2-7+\sqrt{2x-a}\right)^2=\left(x^2-7\right)^2+2x-a$ имеет единственное решение на отрезке $[0;3]$ при $a<0$ или $2\sqrt{7}\le a\le 6$.

Ответ: $(-\infty;0)$; $\left[2\sqrt{7};6\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 38, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от 11 до 22 включительно?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру 4, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно?

в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от 63 до 96 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

а) Пусть стирали следующие пары чисел: 11 и 21, 12 и 17, 13 и 18, 14 и 19, 15 и 20. Тогда на доске останутся числа 16 и 22, сумма которых равна 38.

б) Среди чисел от 63 до 96 ровно 6 чисел, дающих при делении на 5 остатки 2, и ровно по 7 чисел, дающих при делении на 5 четыре других возможных остатка. Следовательно, среди квадратов чисел от 63 до 96 ровно 7 чисел, делящихся на 5, ровно 13 чисел, дающих при делении на 5 остаток 4, и ровно 14 чисел, дающих при делении на 5 остаток 1. По условию каждый раз с доски стирали два числа, разность которых делится на 5. Значит, в каждой из пар стёртых чисел оба числа дают одинаковый остаток при делении на 5.

Поэтому на доске обязательно останется число, делящееся на 5, и число, которое при делении на 5 даёт остаток 4. Произведение этих чисел делится на 5 и, следовательно, не может оканчиваться на цифру 4.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 5, а второе даёт при делении на 5 остаток 4. Первое из этих чисел не меньше 65^2 и не больше 95^2, второе — не меньше 63^2 и не больше 93^2. Поэтому если первое из этих чисел поделить на второе, то получится не больше $\left(\frac{95}{63}\right)^2$, а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше $\left(\frac{93}{65}\right)^2$. Поскольку $\left(\frac{95}{63}\right)^2 > \left(\frac{93}{65}\right)^2$, получаем, что наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

На доске могли остаться числа 95^2 и 63^2, так как остальные квадраты чисел от 63 до 96 можно разбить на такие пары: 3 пары чисел, делящихся на 5, 7 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 1, и 6 пар чисел, дающих при делении на 5 остаток 4. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

Ответ: а) Может; б) не может; в) $\left(\frac{95}{63}\right)^2$.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4