**Матпрактикум, 11«В», Знакомство с дифференциальными уравнениями – 2.**

Численность живых организмов – 2.

Предельная ёмкость среды. Пьер Ферхюльст (Pierre François Verhulst, 1804 –1849), бельгийский математик и демограф.

Ввёл в рассмотрение логистическое уравнение (также уравнение Ферхюльста), добавив в уравнение Мальтуса член, описывающий убывание скорости роста численности по мере приближения к предельной численности:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Здесь $r$ – коэффициент, связанный с рождаемостью (среднее число детей у одной особи), $K$ – предельная ёмкость среды. С помощью своих расчётов предсказал, что население Бельгии не может превысить 9,4 млн чел. (В 2022 в Бельгии жило около 11,7 млн.)

Биологи оперируют понятиями $r$-стратегия (высокая рождаемость, слабая забота о потомстве, короткий жизненный цикл) и $K$-стратегия (низкая рождаемость, тщательная забота о потомстве, долгая жизнь), названными так по коэффициентам логистического уравнения. Почему Ферхюльст именно так назвал своё уравнение, неясно.

Решим это уравнение, записав его в виде $\dfrac{K\,dN}{N(K-N)} = r\,dt$. Интегрируем $\int \dfrac{K\,dN}{N(K-N)} = r\int dt$, то есть $\ln\left(\dfrac{N}{K-N}\right) = e^{rt} + C$. Отсюда находим $N(t) = \dfrac{K}{Ce^{-rt}+1}$. Константу $C$ можно вычислить, как обычно, из начальных условий: если при $t=0$ было $N_0$ особей, то $N_0 = \dfrac{K}{C+1}$, откуда $C = \dfrac{K-N_0}{N_0}$. Окончательно получим $N(t) = \dfrac{KN_0}{(K-N_0)e^{-rt}+N_0}$. Графиком этой функции служит логистическая кривая, экспоненциально приближающаяся к нулю на $-\infty$ и к $K$ на $+\infty$.

Уравнение вытекания воды.

Из сосуда, форму которого можно описать функцией $S(h)$ зависимости площади сечения от высоты, вытекает вода через маленькую (площади $s$) дырочку в нижней части сосуда. Скорость вытекания воды равна $v(t) = 0,6\sqrt{2gh(t)}$, где $h$ — высота уровня воды, а коэффициент $0,6$ связан с вязкостью. За время $\Delta t$ вытечет $sv\Delta t$ воды. Уровень воды за то же время снизится на $S(h)\Delta h$. Опять же деля на $\Delta t$ и приравнивая пределы, получим уравнение

$$S(h)\cdot h'(t) = -0,6s\sqrt{2gh(t)}$$

Это уравнение вытекания воды.

Предположим, что у нас есть полный бак воды, он имеет форму цилиндра с $H = 2$ м и диаметром основания $1$ м. В дне проделана круглая дырочка диаметром $1$ см. Найдите приблизительно время, через которое бак полностью опустеет.

Случай цилиндрического бака самый простой, в нём $S(h) = S = const$. Решим уравнение вытекания воды для этого случая. Разделяем переменные: $\dfrac{dh}{2\sqrt{h}} = -0,6\cdot\left(\dfrac{s}{S}\right)\sqrt{\dfrac{g}{2}}dt$ и интегрируем: $\sqrt{h} = -0,6\cdot\left(\dfrac{s}{S}\right)\sqrt{\dfrac{g}{2}}t+$ . Константа $C$ определяется из условия $h(0) = H$, то есть $C = \sqrt{H}$. Теперь надо найти такое $t$, при котором $h(t) = 0$, то есть $\sqrt{H} = 0,6\cdot\left(\dfrac{s}{S}\right)\sqrt{\dfrac{g}{2}}t$. Подставив числа, найдём, что $t \approx 3$ часа.