Матпрактикум, 11«В», Знакомство с дифференциальными уравнениями – 1.

Численность живых организмов.

Леонардо Пизанский, известным как Фибоначчи.

В книге «Liber Abaci» (1202) рассматривает развитие идеализированной популяции кроликов, предполагая, что:

изначально есть новорожденная пара кроликов (самец и самка);

со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться и каждый месяц производить новую пару кроликов;

кролики никогда не умирают.

Сколько пар кроликов будет через год?

Числа Фибоначчи. Примерный рост F_n. Из тождества Кассини $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$ следует, что $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 \approx 0$, то есть $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \approx \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$. Если положить $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = k$, то нетрудно найти, что $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ — золотое сечение или число Фидия.

Томас Роберт Мальтус (1766 – 1834) Англия, священник англиканской церкви и преподаватель колледжа Иисуса (до своей женитьбы, а после – колледжа Ост-Индской компании). Сочетал твёрдую веру и приверженность Просвещению.

Мальтус был избран одновременно членом Лондонского Королевского общества и членом Французской Академии наук (честь, которой удостаивались немногие учёные), стал основателем Клуба Политической Экономии и одним из основателей Лондонского статистического общества.

Основное сочинение «Essay on the principle of population», 1798.

Из-за биологической способности человека к продолжению рода, его физические способности используются для увеличения своих продовольственных ресурсов.

Народонаселение строго ограничено средствами существования.

Рост народонаселения может быть остановлен лишь встречными причинами, которые сводятся к нравственному воздержанию или несчастьям (войны, эпидемии, голод).

Суть учения Мальтуса (сильно упрощая) обычно выражают словами «народонаселение растёт в геометрической прогрессии, а средства существования — в арифметической».

Уравнение Мальтуса.

Пусть $N(t)$ — количество особей в момент t. Тогда $\Delta N = n(t+\Delta t) - N(t) = k \cdot N(t) \cdot \Delta t$ — прирост пропорционален количеству особей и промежутку времени. Деля на Δt и устремляя Δt к нулю, получим $N'(t) = kN(t)$. Это уравнение Мальтуса.

Уравнение радиактивного распада.

Точно таким же уравнением (с $k < 0$) описывается радиоактивный распад. У радиоактивного вещества распадается ядро, атомы же взаимодействуют электронными оболочками, поэтому когда один атом распадается, остальные об этом «не знают». За время Δt количество атомов $N(t)$ изменится на величину $\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$. Она пропорциональна количеству атомов (чем их больше, тем больше атомов распадётся), а также величине промежутка времени.

Решения этого уравнения имеют вид $N(t) = Ce^{kt}$. Действительно, $\dfrac{dN}{N} = kdt$, значит

$\displaystyle\int \frac{dN}{N} = k\int t\,dt$, то есть $\ln N = kt + c$, а тогда $N = e^c \cdot e^{kt} = Ce^{kt}$. Значение константы C определяется из начальных условий. Обычно полагают $N(0) = N_0$, тогда $C = N_0$ b $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Время T, за которое распадётся половина первоначального количества вещества, называют периодом полураспада. Оно находится из уравнения $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{kT}$, то есть $T = -\frac{\ln 2}{k}$. Отсюда $k = -\frac{\ln 2}{T}$ и уравнение можно записать ещё и так: $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$.

Пример. В костях живого человека один из $5 \cdot 10^{11}$ атомов углерода является изотопом ^{14}C (период полураспада 5700 лет), остальные атомы углерода — устойчивые изотопы ^{12}C. При исследовании образца массой 1 г одной из человеческих костей, найденных на стоянке первобытного человека, за 10 мин зарегистрировано 100 распадов атомов ^{14}C. Считая, что изучаемый образец состоит только из углерода (этого можно добиться специальной обработкой), оцените возраст образца (напомним, что в 12 г углерода содержится $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ атомов).

Примем 10 мин (примерно $2 \cdot 10^{-5}$ лет) за Δt, а за t лет — текущий момент. Все дальнейшие вычисления приближённые, знак равенства мы ставим условно. Пусть сейчас в образце $N(t) = N$ атомов углерода-14. Тогда $100 = k \cdot N \cdot 2 \cdot 10^{-5}$, то есть $10^7 = \frac{2 \ln 2}{T} \cdot N$. Отсюда $N = 4 \cdot 10^{10}$. Но в одном грамме живого образца было $0,5 \cdot 10^{23}$ атомов, а радиоактивных из них $\frac{0,5 \cdot 10^{23}}{5 \cdot 10^{11}} = 10^{11} = N_0$. Ну и $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, так что $2^{-\frac{t}{T}} = 0,4$, ответ примерно 7535 лет.