Тренировочная работа №5 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
28 апреля 2022 года
Вариант МА2110509
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

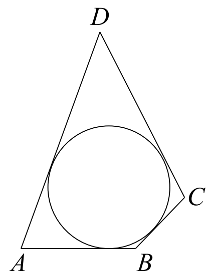
1 Найдите корень уравнения $\log_3(12-x) = 3\log_3 4$.

Ответ: ___________________________.

2 В среднем из 75 морозильников, поступивших в продажу, 6 имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля морозильник **не имеет** дефекта.

Ответ: ___________________________.

3 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 56, вписана окружность, $AB = 12$. Найдите длину стороны CD.

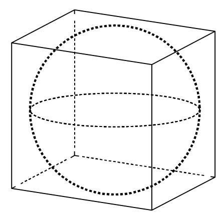


Ответ: ___________________________.

4 Найдите значение выражения $\log_{2,5} 3\cdot\log_3 0{,}064$.

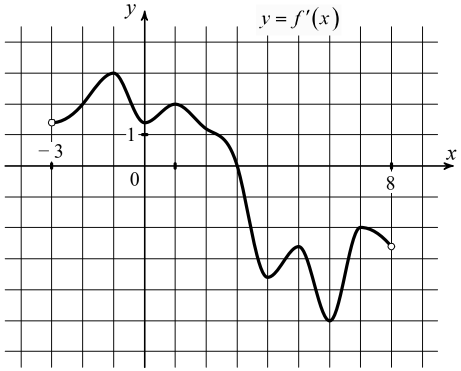
Ответ: ___________________________.

5 Шар, объём которого равен 29π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Ответ: ___________________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ___________________________.

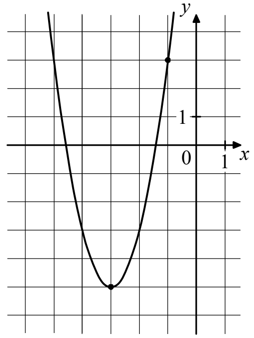
7 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -14$ К/мин^2, $b = 154$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

8 Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 4 часа раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 1 час 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

Ответ: ___________________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + 12x + c$. Найдите значение $f(-6)$.



Ответ: ___________________________.

10 По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А вовремя, равна 0,84. Вероятность того, что товар доставят вовремя из магазина Б, равна 0,9. Пётр Петрович заказал товары одновременно в двух магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар вовремя.

Ответ: ___________________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = (x+3)^2 e^{15-x}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $4\sin x - 5\cos x = 5 - 2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 Радиус основания конуса равен 8, высота равна 4. Сечение конуса плоскостью α, проходящей через его вершину, отсекает от окружности основания дугу в $60°$.

а) Докажите, что величина угла между плоскостью α и плоскостью основания конуса равна $30°$.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

14 Решите неравенство $\left(36^x - 5\cdot 6^x\right)^2 + 10\cdot 6^x < 2\cdot 36^x + 24$.

15 15 августа планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца (r — целое число);

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 51 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $AD = 2BC$.

а) Докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка OD, если $AB = 13$ и $BC = 10$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}\left((x-3)^2+(y-3)^2\right)\left((x-2)^2+(y-8)^2\right)\le 0,\\ (2x-a)^2+(y-a)^2\le a^2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

18 Для членов последовательности целых чисел $a_1, a_2, ..., a_6$ для всех натуральных $k \le 4$ выполняется неравенство $a_{k+2} < 3a_{k+1} - 2a_k$.

а) Существует ли такая последовательность, у которой $a_1 = 0$ и $a_6 = 30$?

б) Существует ли такая последовательность, у которой $a_1 = a_3 = a_6$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_2, если $a_1 = 0$ и $a_6 = 1100$?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2110509-2110512 (профильный уровень) от 28.04.2022

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2110509	- 52	0,92	16	- 3	174	- 2	5	6	13	0,016	- 1
2110510	- 19	0,95	10	- 0,5	138	- 4	3	4	15	0,021	- 5
2110511	1,5	0,006	81	0,1	2,25	7	182	35	- 0,25	0,02	4
2110512	2,5	0,004	102	0,3	3,2	5	232	75	- 0,75	0,15	7

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

12 а) Решите уравнение $4\sin x-5\cos x=5-2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$4\sin x-5\cos x-5+4\sin x\cdot\cos x=0;\quad (4\sin x-5)(\cos x+1)=0.$$

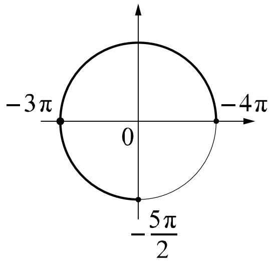
Получаем: $4\sin x=5$ или $\cos x=-1$.

Уравнение $\sin x=\frac{5}{4}$ корней не имеет.

Уравнение $\cos x=-1$ имеет корни $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим -3π.



Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in Z$; б) -3π.

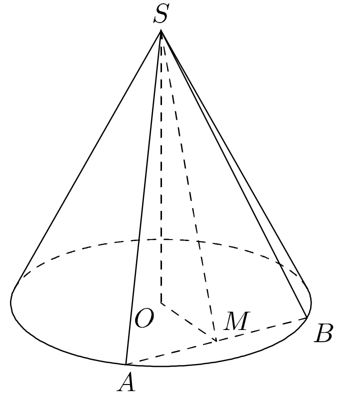
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 Радиус основания конуса равен 8, высота равна 4. Сечение конуса плоскостью α, проходящей через его вершину, отсекает от окружности основания дугу в 60°.

а) Докажите, что величина угла между плоскостью α и плоскостью основания конуса равна 30°.

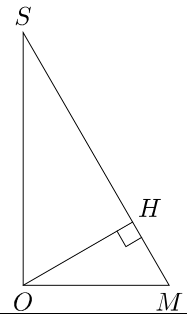
б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.



а) Пусть S — вершина конуса, O — центр основания, A и B — точки пересечения плоскости α с окружностью основания, M — середина хорды AB. По условию $\angle AOB=60^\circ$, поэтому $\angle AOM=\angle BOM=30^\circ$, $OM=\frac{OA\cdot\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. Угол SMO — линейный угол двугранного угла, образованный плоскостью α и плоскостью основания. В прямоугольном треугольнике SMO зная катеты $SO=4$, $OM=4\sqrt{3}$, найдём $\operatorname{tg}\angle SMO=\frac{\sqrt{3}}{3}$, то есть $\angle SMO=30^\circ$.

б) Плоскости SMO и ASB перпендикулярны, поэтому искомое расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно высоте OH прямоугольного треугольника SMO. Так как $\angle SMO=30^\circ$, то $SM=2SO=8$, поэтому $OH=\frac{SO\cdot OM}{SM}=2\sqrt{3}$.



Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\left(36^x-5\cdot 6^x\right)^2+10\cdot 6^x<2\cdot 36^x+24$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\left(36^x-5\cdot 6^x\right)^2-2\left(36^x-5\cdot 6^x\right)-24<0;$$

$$\left(36^x-5\cdot 6^x-6\right)\left(36^x-5\cdot 6^x+4\right)<0;$$

$$\left(6^x-6\right)\left(6^x+1\right)\left(6^x-4\right)\left(6^x-1\right)<0.$$

Следовательно, $-1<6^x<1$ или $4<6^x<6$, откуда $x<0$ или $\log_6 4<x<1$.

Таким образом, $x\in(-\infty;0)\cup\left(\log_6 4;1\right)$.

Ответ: $(-\infty;0)$; $\left(\log_6 4;1\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 15 августа планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца (r — целое число);

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 51 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

Решение.

Обозначим размер кредита буквой S. Долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\quad \frac{15}{16}S;\quad \frac{14}{16}S;\quad \ldots;\quad \frac{1}{16}S;\quad 0.$$

По условию 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r %. Тогда последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)S;\quad \left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\frac{15}{16}S;\quad \left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\frac{14}{16}S;\quad \ldots;\quad \left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\frac{1}{16}S.$$

Значит, выплаты должны быть следующими:

$$\frac{S}{16}+\frac{rS}{100};\quad \frac{S}{16}\left(1+\frac{15r}{100}\right);\quad \frac{S}{16}\left(1+\frac{14r}{100}\right);\quad \ldots;\quad \frac{S}{16}\left(1+\frac{r}{100}\right).$$

Всего следует выплатить

$$\frac{S}{16}\left(1+\frac{16r}{100}\right)+\frac{S}{16}\left(1+\frac{15r}{100}\right)+\ldots+\frac{S}{16}\left(1+\frac{r}{100}\right)=S+\frac{rS}{100}\left(\frac{16+\ldots+1}{16}\right)=S\left(1+\frac{17r}{200}\right).$$

По условию $S\left(1+\frac{17r}{200}\right)=1{,}51S$, следовательно, $r=6$.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $AD=2BC$.

а) Докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

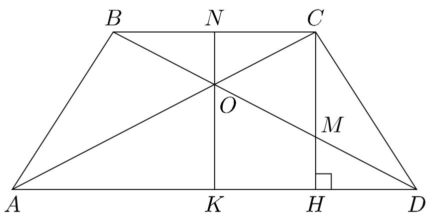
б) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка OD, если $AB=13$ и $BC=10$.

Решение.

а) Пусть $BC=a$, $AD=2a$. Тогда

$$DH=\frac{AD-BC}{2}=\frac{a}{2},\quad AH=AD-DH=\frac{3a}{2}.$$

Следовательно, $AH=3DH$.



б) Пусть M — точка пересечения CH и BD. Треугольники DOA и BOC подобны с коэффициентом $\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$, поэтому $BO=\frac{1}{2}OD$. Значит, $BO=\frac{1}{3}BD$.

Прямоугольные треугольники BMC и DMH подобны с коэффициентом $\frac{DH}{BC}=\frac{a}{2\cdot a}=\frac{1}{2}$, поэтому $DM=\frac{1}{2}BM$. Значит, $DM=\frac{1}{3}BD$. Тогда

$$OM=BD-BO-DM=\frac{1}{3}BD.$$

Следовательно, $DM=OM$, т.е. M — середина отрезка OD.

Поскольку $BC=10$ и $AB=13$, а трапеция равнобедренная, получаем, что $CD=AB=13$ и $DH=5$. Пусть N и K — середины оснований BC и AD соответственно. Тогда NK — высота трапеции, проходящая через точку O, и

$$ON=\frac{1}{3}NK=\frac{1}{3}CH=\frac{1}{3}\sqrt{CD^2-DH^2}=4,$$

а так как ON — средняя линия треугольника BCM, получаем, что $CM=2\cdot ON=8$.

Ответ: б) 8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения *а*, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}\left((x-3)^2+(y-3)^2\right)\left((x-2)^2+(y-8)^2\right)\le 0,\\ (2x-a)^2+(y-a)^2\le a^2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Первое неравенство имеет ровно два решения: $(3;3)$, $(2;8)$. Следовательно, данная система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда второму неравенству удовлетворяет только одно из решений первого неравенства.

Найдём все значения *а*, которые являются решениями систем неравенств:

$$\begin{cases}(6-a)^2+(3-a)^2\le a^2,\\ (4-a)^2+(8-a)^2>a^2\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}(6-a)^2+(3-a)^2>a^2,\\ (4-a)^2+(8-a)^2\le a^2.\end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases}(6-a)^2+(3-a)^2\le a^2,\\ (4-a)^2+(8-a)^2>a^2;\end{cases} \begin{cases}(a-3)(a-15)\le 0,\\ (a-4)(a-20)>0.\end{cases}$$

Получаем: $3\le a<4$.

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases}(6-a)^2+(3-a)^2>a^2,\\ (4-a)^2+(8-a)^2\le a^2;\end{cases} \begin{cases}(a-3)(a-15)>0,\\ (a-4)(a-20)\le 0.\end{cases}$$

Получаем: $15<a\le 20$.

При $3\le a<4$ и $15<a\le 20$ исходная система неравенств имеет ровно одно решение.

Ответ: $[3;4)$; $(15;20]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *а*, отличающееся от искомого только исключением точек $a=3$ и/или $a=20$	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы один из промежутков $[3;4)$ или $(15;20]$ значений *а* ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно решено первое неравенство и задача сведена к исследованию решений второго неравенства для найденных решений первого неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Для членов последовательности целых чисел $a_1, a_2, ..., a_6$ для всех натуральных $k \le 4$ выполняется неравенство $a_{k+2} < 3a_{k+1} - 2a_k$.

а) Существует ли такая последовательность, у которой $a_1 = 0$ и $a_6 = 30$?

б) Существует ли такая последовательность, у которой $a_1 = a_3 = a_6$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_2, если $a_1 = 0$ и $a_6 = 1100$?

Решение.

а) Да, например, последовательность 0, 6, 12, 18, 24, 30.

б) Предположим, что такая последовательность существует. Запишем неравенство $a_{k+2} < 3a_{k+1} - 2a_k$ в виде $a_{k+2} - a_{k+1} < 2(a_{k+1} - a_k)$ при всех натуральных $k \le 4$.

Отсюда получаем, что

$0 = 2(a_3 - a_1) = 2(a_3 - a_2) + 2(a_2 - a_1) > 2(a_3 - a_2) + a_3 - a_2 > 3(a_3 - a_2)$.

Следовательно,

$0 > a_3 - a_2 > 2(a_3 - a_2) > a_4 - a_3 > ... > a_6 - a_5$, тогда

$a_6 - a_3 = (a_6 - a_5) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) < 0$.

Пришли к противоречию с условием $a_6 = a_3$.

в) Рассмотрим произвольную такую последовательность. Тогда, как и ранее, $a_{k+2} - a_{k+1} < 2(a_{k+1} - a_k)$ при всех натуральных $k \le 4$. Поскольку все члены данной последовательности целые числа, разности $a_{k+2} - a_{k+1}$ и $a_{k+1} - a_k$ также являются целыми числами. Отсюда получаем, что $a_{k+2} - a_{k+1} \le 2(a_{k+1} - a_k) - 1$ при всех $1 \le k \le 4$.

Получаем:

$a_2 - a_1 = a_2 - 0 = a_2$; $a_3 - a_2 \le 2(a_2 - a_1) - 1 = 2a_2 - 1$;

$a_4 - a_3 \le 2(a_3 - a_2) - 1 \le 4a_2 - 3$; $a_5 - a_4 \le 2(a_4 - a_3) - 1 \le 8a_2 - 7$

и $a_6 - a_5 \le 2(a_5 - a_4) - 1 \le 16a_2 - 15$.

Поэтому $1100 = a_6 = (a_6 - a_5) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + a_2 \le 31a_2 - 26$.

Следовательно, $a_2 \ge \frac{1100 + 26}{31} > 36$; $a_2 \ge 37$.

В последовательности 0, 37, $3 \cdot 37 - 1$, $7 \cdot 37 - 4$, $15 \cdot 37 - 11$, 1100 a_2 равно 37.

Ответ: а) да; б) нет; в) 37.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*