**Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022**
**Заключительный этап**

## 11 класс

**Задача 1.** На тарелке лежат различные конфеты трёх видов: 2 леденца, 3 шоколадных и 5 мармеладных. Света последовательно все их съела, выбирая каждую следующую конфету наугад. Найдите вероятность того, что первая и последняя съеденные конфеты были одного вида.

*Ответ:* 14/45.

*Решение.* Две конфеты одного вида могут быть либо леденцами, либо шоколадными, либо мармеладными. Посчитаем вероятности каждого из этих событий и сложим их.

Упорядочим конфеты в порядке их съедания. Вероятность того, что первая конфета — леденец, равна $2/10$. Вероятность того, что последняя конфета — леденец, равна вероятности того, что леденец на любом другом месте. Следовательно, эта вероятность равна $1/9$, поскольку после выбора первой конфеты осталось всего 9 конфет, среди которых ровно один леденец. Итак, вероятность того, что первая и последняя конфеты — леденцы, равна $2/10 \cdot 1/9 = 2/90$.

Аналогично найдём вероятность того, что первая и последняя конфета — шоколадные, она равна $3/10 \cdot 2/9 = 6/90$. А вероятность того, что первая и последняя конфета — мармеладные, равна $5/10 \cdot 4/9 = 20/90$. Следовательно, ответом задачи является число

$$2/90 + 6/90 + 20/90 = 28/90 = 14/45.$$

*Замечание.* Вероятность того, что первая и последняя конфеты являются леденцами, можно также считать следующим образом.

Всего есть $\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}$ способов выложить наши 10 конфет в ряд, а среди них есть $\dfrac{8}{3!\cdot 5!}$ способов выложить их в ряд так, чтобы леденцы были в начале и в конце. Тогда вероятность того, что первая и последняя конфеты являются леденцами, равна

$$\frac{\dfrac{8}{3!\cdot 5!}}{\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

Аналогичным образом можно посчитать вероятности и для конфет других видов. □

*Критерии*

7 б. Любое полное решение задачи.

В решении, аналогичном авторскому, но содержащем арифметические ошибки, следующие критерии суммируются:

2 б. Верно найдена вероятность того, что первая и последняя конфеты — леденцы.

2 б. Верно найдена вероятность того, что первая и последняя конфеты — шоколадные.

2 б. Верно найдена вероятность того, что первая и последняя конфеты — мармеладные.

1 б. Найден верный ответ.

**Задача 2.** В школьном турнире по крестикам-ноликам участвовали 16 учеников, каждый сыграл с каждым ровно одну игру. За победу давалось 5 очков, за ничью — 2 очка, за поражение — 0 очков. После завершения турнира выяснилось, что суммарно все участники набрали 550 очков. Какое наибольшее количество участников могло ни разу не сыграть вничью в этом турнире?

*Ответ:*

*Решение.* Всего за турнир было сыграно $\dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$ игр. В каждой игре разыгрывалось либо 5 очков (в случае победы-поражения), либо 4 очка (в случае ничьей). Если бы все игры были сыграны вничью, то суммарное количество очков у всех участников равнялось бы $120 \cdot 4 = 480$, что на 70 меньше, чем реальная сумма очков всех участников. В случае не ничейной игры два её участника суммарно получают на 1 очко больше, чем в случае ничейной игры. Это означает, что ровно 70 игр завершились победой одного из участников, а остальные 50 игр закончились вничью.

Предположим, что хотя бы 6 участников ни разу не сыграли вничью. Тогда ничейные партии могли пройти только между оставшимися 10 участниками, а всего они между собой сыграли $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ игр, что меньше 50. Противоречие. Следовательно, не более 5 участников ни разу не сыграли вничью.

Нетрудно описать пример для 5 участников. Зафиксируем 11 участников, они сыграли между собой $\dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$ игр. Выберем любые 50 из этих игр, пусть они были сыграны вничью (ясно тогда, что каждый из зафиксированных 11 участников хотя бы раз сыграет вничью), а все остальные игры турнира закончились победой любого из участников. Следовательно, $16 - 11 = 5$ человек ни разу не сыграли вничью. Ясно, что все условия задачи выполняются. □

*Критерии*

Следующие критерии суммируются:

2 б. Верно описан пример, в котором ровно 5 человек ни разу не сыграли вничью.

5 б. Доказано, что не более 5 человек ни разу не сыграли вничью.

Если отсутствует доказательство, что не более 5 человек ни разу не сыграли вничью:

2 б. Доказано, что ничьих было ровно 50 (или что результативных партий было ровно 70).

**Задача 3.** Натуральное число $A$ назовём *интересным*, если существует натуральное число $B$ такое, что:

- $A > B$;
- разность чисел $A$ и $B$ — простое число;
- произведение чисел $A$ и $B$ — точный квадрат.

Найдите все интересные числа, большие 200 и меньшие 400.

*Ответ:* 225, 256, 361.

*Решение.* Пусть $A - B = p$ — простое число. По условию $AB = B(B+p) = n^2$ для некоторого натурального $n$. Заметим, что НОД чисел $B$ и $B+p$ делит их разность, равную $p$, поэтому он равен либо $p$, либо 1. Разберём два случая.

- Предположим, НОД$(B, B+p) = p$. Тогда $B = ps$ и $B + p = p(s+1)$ для некоторого натурального $s$. Тогда $n^2 = B(B+p) = ps \cdot p(s+1)$, т. е. $n^2 = p^2 s(s+1)$. Отсюда следует, что $n$ делится на $p$, поэтому $s(s+1) = \left(\frac{n}{p}\right)^2$ — точный квадрат. Но $s^2 < s(s+1) < (s+1)^2$, т. е. число $s(s+1)$ находится между двумя последовательными точными квадратами, поэтому само не может быть точным квадратом. Противоречие.
- Предположим, НОД$(B, B+p) = 1$. Произведение взаимно простых чисел $B$ и $B+p$ является точным квадратом тогда и только тогда, когда сами числа $B$ и $B+p$ являются точными квадратами. Тогда $B = b^2$ и $A = B + p = a^2$ для некоторых натуральных $a > b$, откуда следует, что $p = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Из того, что произведение натуральных чисел $a - b$ и $a + b$ равно простому числу $p$, следует, что $a - b = 1$ и $a + b = p$. Тогда $a = \frac{p+1}{2}$ и $b = \frac{p-1}{2}$, поэтому $B = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ и $A = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Поскольку число $p$ является простым, получаем несколько случаев:
  - Если $p \leqslant 23$, то $A \leqslant 12^2 < 200$ — не подходит под условие задачи.
  - Если $p = 29$, то $A = 15^2 = 225$ и $B = 14^2 = 196$ — подходит под условие задачи.
  - Если $p = 31$, то $A = 16^2 = 256$ и $B = 15^2 = 225$ — подходит под условие задачи.

– Если $p = 37$, то $A = 19^2 = 361$ и $B = 18^2 = 324$ — подходит под условие задачи.

– Если $p \geqslant 41$, то $A \geqslant 21^2 > 400$ — не подходит под условие задачи.

□

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

6 б. Найден явный вид чисел $A$ и $B$, но неверно найдены все возможные значения $A$ от $200$ до $400$.

3 б. Доказано, что числа $A$ и $B$ являются точными квадратами, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Есть только верный ответ.

**Задача 4.** Положительные числа $a, b, c, d$ больше 1. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\log_a(ab^2) + \log_b(b^2c^3) + \log_c(c^5d^6) + \log_d(d^{35}a^{36}).$$

*Ответ:* 67.

*Решение.* Из свойств логарифма следует, что $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a = 1$. Также все эти четыре множителя положительны, поскольку все числа $a, b, c, d$ больше 1.

Преобразуем и оценим имеющееся выражение

$$S = \log_a(ab^2) + \log_b(b^2c^3) + \log_c(c^5d^6) + \log_d(d^{35}a^{36}) =$$

$$= (\log_a a + \log_a b^2) + (\log_b b^2 + \log_b c^3) + (\log_c c^5 + \log_c d^6) + (\log_d d^{35} + \log_d a^{36}) =$$

$$= (1 + 2\log_a b) + (2 + 3\log_b c) + (5 + 6\log_c d) + (35 + 36\log_d a) \geqslant$$

$$\geqslant (1 + 2 + 5 + 35) + 4\sqrt[4]{2\log_a b \cdot 3\log_b c \cdot 6\log_c d \cdot 36\log_d a} = 43 + 4 \cdot 6 = 67,$$

здесь в последнем переходе использовалось неравенство между арифметическим и средним геометрическим для четырёх положительных чисел $2\log_a b$, $3\log_b c$, 6 l

Также отметим, что значение $S = 67$ достигается, например, при $a = 2, b = 8, c = d = 64$, поскольку все четыре числа $2\log_a b$, $3\log_b c$, $6\log_c d$, $36\log_d a$ будут равны 6. □

*Критерии*

Баллы за оценку и пример суммируются.

Оценка. Используется один наибольший подходящий критерий:

5 б. Доказана оценка $S \geqslant 67$.

1 б. Задача сведена к нахождению минимума суммы $2\log_a b + 3\log_b c + 6\log_c d + 36\log_d a$.

0 б. Упомянута положительность чисел $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c d$, $\log_d a$.

Пример. Используется один наибольший подходящий критерий:

2 б. Доказано, что значение $S = 67$ достигается при некоторых $a, b, c, d$, больших 1.

0 б. Только верный ответ.

**Задача 5.** Точка $P$ внутри остроугольного треугольника $ABC$ такова, что $\angle BAP = \angle CAP$. Точка $M$ — середина стороны $BC$. Прямая $MP$ пересекает описанные окружности треугольников $ABP$ и $ACP$ в точках $D$ и $E$ соответственно (точка $P$ лежит между точками $M$ и $E$, точка $E$ лежит между точками $P$ и $D$). Оказалось, что $DE = MP$. Докажите, что $BC = 2BP$.

*Ответ:* 35.

*Решение.* Четырёхугольник $AEPC$ — вписанный, поэтому $\angle CAP = \angle CEP$. Аналогично четырёхугольник $BPAD$ — вписанный, поэтому $\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP$.

Опустим высоты $BX$ и $CY$ на прямую $MP$. Заметим, что прямоугольные треугольники $BMX$ и $CMY$ равны по гипотенузе $BM = MC$ и острому углу $\angle BMX = \angle CMY$, откуда получаем $BX = CY$.

Заметим, что прямоугольные треугольники $CYE$ и $BXD$ равны по катету $CY = BX$ и острому углу $\angle CEY = \angle CEP = \angle BDP = \angle BDX$, откуда получаем $YE = XD$. Тогда

$$0 = YE - XD = (YM + MP + PE) - (XP + PE + ED) = YM - XP.$$

Получается, что $XP = YM = XM$. Следовательно, в треугольнике $BPM$ высота $BX$ совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, и $BP = BM = \dfrac{BC}{2}$, что и требовалось.

*Другое решение.* После равенства $\angle BDP = \angle CEP$ можно было закончить решение иначе. Можно доказать, что треугольники $BDP$ и $CEM$ равны, откуда и следует $BP = CM = \frac{BC}{2}$.

По теореме синусов для треугольников $BDM$ и $CEM$ имеем

$$\frac{BD}{\sin\angle BMD} = \frac{BM}{\sin\angle BDM} = \frac{CM}{\sin\angle CEM} = \frac{CE}{\sin\angle CME}.$$

Поскольку $\angle BMD + \angle CME = 180°$, получаем $BD = CE$. Тогда треугольники $BDP$ и $CEM$ равны по двум сторонам $BD = CE, DP = EM$ и углу между ними $\angle BDP = \angle CEM$. $\square$

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

6 б. Корректно доказано, что треугольники $BDP$ и $CEM$ равны, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Допущена ошибка в доказательстве равенства треугольников $BDP$ и $CEM$, либо доказано, что $BD = CE$, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Доказано, что $\angle CEM = \angle PDB$, либо $\angle CAP = \angle CEM$, либо $\angle BAP = \angle BDP$ но дальнейших продвижений нет.

1 б. Приведен корректный рисунок задачи.

**Задача 6.** Назовём функцию $f$ *хорошей*, если

- $f$ определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает действительные значения;
- для всех $x, y \in [0, 1]$ верно $|x - y|^2 \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$.

Найдите все хорошие функции.

*Ответ:* $f(x) = x + c$, $f(x) = -x + c$, где $c \in \mathbb{R}$.

*Решение.* Очевидно, что все функции, приведённые выше, подходят. Заметим, что вместе с каждой функцией $f(x)$, удовлетворяющей условию, ему также удовлетворяют и все функции вида $f(x) + c$ и $-f(x)$. Докажем, что если $f(0) = 0$ и $f(1) \geqslant 0$, то при всех $x \in [0, 1]$ верно $f(x) = x$. Отсюда и из замечания выше будет следовать приведённый ответ.

Итак, пусть $f(0) = 0$ и $f(1) \geqslant 0$. Подставив $x = 0$, $y = 1$, получаем $1 \leqslant |f(0) - f(1)| \leqslant 1$, то есть $|f(1)| = 1$, поэтому $f(1) = 1$. Далее для любого $x \in (0, 1)$ имеем

$$f(x) \leqslant |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant |x - 0| = x \quad \text{и}$$

$$1 - f(x) \leqslant |1 - f(x)| = |f(1) - f(x)| \leqslant |1 - x| = 1 - x.$$

Итак, $f(x) \leqslant x$ и $1 - f(x) \leqslant 1 - x$, то есть $f(x) \geqslant x$. Следовательно, $f(x) = x$. $\square$

*Критерии*

7 б. Любое полное решение задачи.

В недоведённом решении следующие критерии суммируются:

1 б. Есть только верный ответ.