Темой этого занятия является метод визуализации задачи с параметром в координатной плоскости "переменная-параметр то есть когда мы считаем параметр функцией от переменной (или наоборот). Связи переменной и параметра в этом случае графически задают линии или области в такой координатной плоскости.

В качестве примера мы на уроке рассмотрели задачу из сборника для подготовки к ЕГЭ под редакцией Ященко.

При каких $\boldsymbol{a}$ неравенство $\left|\dfrac{\boldsymbol{x^2+x-2a}}{\boldsymbol{x+a}}-\mathbf{1}\right| \leqslant \mathbf{2}$ не имеет решений на $\mathbf{(1\,;\,2)}$?

Неравенство легко сводится к $|\boldsymbol{x^2-3a}| \leqslant \mathbf{2}|\boldsymbol{x+a}|$ (1) с дополнительным условием $\boldsymbol{x \neq -a}$ (2). Какое множество точек задаёт (1) на координатной плоскости $\boldsymbol{xOa}$?

Сначала изобразим множество $|\boldsymbol{x^2-3a}| = \mathbf{2}|\boldsymbol{x+a}|$. Это совокупность линий $\boldsymbol{x^2-3a = \pm 2(x+a)}$, то есть две параболы, $\boldsymbol{a = x^2+2x}$ и $\boldsymbol{a = \dfrac{x^2-2x}{5}}$. Они пересекаются в точках $\boldsymbol{A(0\,;\,0)}$ и $\boldsymbol{B(-3\,;\,3)}$ и делят плоскость на пять частей. В каждой из них (1) либо выполнено, либо нет. Части, в которых выполнено, закрашиваем. Сами параболы рисуем сплошной линией, там (1) тоже выполнено. Условие (2) учитываем, изобразив пунктиром прямую $\boldsymbol{a = -x}$ (это в точности прямая $\boldsymbol{AB}$), все её точки из областей надо выбросить (собственно, выбрасываются именно $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$).

Теперь рисуем полосу между пунктирными $\boldsymbol{x = 1}$ и $\boldsymbol{x = 2}$ и смотрим по графику те $\boldsymbol{a_0}$, где прямая $\boldsymbol{a = a_0}$ не пересекает пересечение области (1) с полосой.

Ответ: при $\boldsymbol{a} \in (-\infty\,;\,-\mathbf{0,2}] \cup [\mathbf{8}\,;\,+\infty)$.

Матпрактикум, 11«В», 14 декабря, задачи для самостоятельного решения.

$\boxed{1.}$ При каких $\boldsymbol{p}$ множество решений неравенства $\boldsymbol{(p-x^2)(p+x-2) < 0}$ не содержит ни одного решения неравенства $\boldsymbol{x^2 \leqslant 1}$?

$\boxed{2.}$ При каких $\boldsymbol{a}$ система уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{2} + \log_3\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{9}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\boldsymbol{2y}}{\mathbf{9}}\right) = \log_3(\boldsymbol{2a+x-y-6}) \\ \sqrt{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y+2} \end{cases}$$

имеет решения?

Матпрактикум, 11«В», 14 декабря, домашнее задание на вторник, 20 декабря.

$\boxed{1.}$ Решите методом областей в плоскости $\boldsymbol{xOa}$ задачу из прошлого домашнего задания (№44):

При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ решения неравенства $|\boldsymbol{3x-a}|+\mathbf{2} \leqslant |\boldsymbol{x-4}|$ образуют отрезок длины $\mathbf{1}$?

Если Вы решали её к этому уроку, сравните, проще или сложнее получается.

Две следующие задачи также решите с помощью перехода к плоскости "переменная-параметр".

$\boxed{2.}$ При каких $\boldsymbol{m}$ уравнение $\boldsymbol{x^2+2m = x+|x^2-m|}$ имеет ровно три корня?

$\boxed{3.}$ [МГУ, ф-т почвоведения, 1993] При каких $\boldsymbol{a}$ у неравенства $\boldsymbol{x + \dfrac{7a^2+a-2}{x+a+1} < 7a-1}$ нет положительных решений?