Перед Вами ДВИ – «дополнительное вступительное испытание» – по математике 2016 года. ДВИ проводит МГУ для ряда факультетов, куда сдаётся математика, – от геологии и госуправления до мехмата и ВМК. Задач восемь, они школьные или стилизованные под школьные, при этом разброс сложности от начала к концу варианта очень велик. Можно считать, что задачи идут парами – первые две простые, потом две средние, две средне-трудные и две трудные.

Первые две задачи ***сейчас не решайте, пожалуйста,*** *это чисто поржать:*

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

Про две следующие задачи вам должно быть более-менее сразу понятно, как решать каждую из них, но они требуют и времени и аккуратности. Сейчас я прошу вас решить и записать ***одну из них на ваш выбор.*** *Может быть, полезнее №4, раз у вас сейчас как раз эта тема по алгебре, но, возможно, вас от неравенств типа №4 уже воротит, тогда сделайте №3.*

3 Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

4 Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leqslant 1$.

Первых четырёх задач хватит для поступления на факультет типа Высшая школа государственного аудита (да, в МГУ и такой есть). Но не останавливаемся на этом и решаем дальше)

Задачи №№5 и 6 уже требуют не только аккуратности, но правильного выбора пути решения – в них можно пойти не туда и запутаться. Постарайтесь решить обе, они совсем разные и довольно интересные и поучительные. «Цветистое» условие текстовой задачи – фирменный стиль ДВИ, у них каждый год такое, и это ещё не самый яркий пример :)

5 Две окружности касаются внутенним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

6 Ровно в **9.00** из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две трети пути, наблюдательныей водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в **11.00**? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Две последние задачи трудоёмки и идейны. Считается, что даже у подготовленного абитуриента хватит сил только на одну из них (и за семь задач 100 баллов ставят). Полагаю, что и у вас сегодня тоже хватит времени подумать только над одной, хотя кто знает, кто знает... Лично мне №7 показалась всё же довольно нетрудной (м. б. профдеформация:), а №8 – трудной. Но там красивая идея зато:) В общем, пробуйте. Удачи!

7 В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

8 Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары $(a\,;\,x)$, при которых оно достигается.

Перед Вами ДВИ – «дополнительное вступительное испытание» – по математике 2016 года. ДВИ проводит МГУ для ряда факультетов, куда сдаётся математика, – от геологии и госуправления до мехмата и ВМК. Задач восемь, они школьные или стилизованные под школьные, при этом разброс сложности от начала к концу варианта очень велик. Можно считать, что задачи идут парами – первые две простые, потом две средние, две средне-трудные и две трудные.

Первые две задачи ***сейчас не решайте, пожалуйста,*** *это чисто поржать:*

$\boxed{1.}$ Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

$\boxed{2.}$ Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

Про две следующие задачи вам должно быть более-менее сразу понятно, как решать каждую из них, но они требуют и времени и аккуратности. Сейчас я прошу вас решить и записать ***одну из них на ваш выбор.*** *Может быть, полезнее №4, раз у вас сейчас как раз эта тема по алгебре, но, возможно, вас от неравенств типа №4 уже воротит, тогда сделайте №3.*

$\boxed{3}$ Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin 2x = 4 + 3\cos 2x$.

$\boxed{4}$ Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}(1 + \log_x^2 3) \leqslant 1$.

Первых четырёх задач хватит для поступления на факультет типа Высшая школа государственного аудита (да, в МГУ и такой есть). Но не останавливаемся на этом и решаем дальше)

Задачи №№5 и 6 уже требуют не только аккуратности, но правильного выбора пути решения – в них можно пойти не туда и запутаться. Постарайтесь решить обе, они совсем разные и довольно интересные и поучительные. «Цветистое» условие текстовой задачи – фирменный стиль ДВИ, у них каждый год такое, и это ещё не самый яркий пример :)

$\boxed{5}$ Две окружности касаются внутенним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

$\boxed{6}$ Ровно в **9.00** из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две трети пути, наблюдательныей водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в **11.00**? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Две последние задачи трудоёмки и идейны. Считается, что даже у подготовленного абитуриента хватит сил только на одну из них (и за семь задач 100 баллов ставят). Полагаю, что и у вас сегодня тоже хватит времени подумать только над одной, хотя кто знает, кто знает... Лично мне №7 показалась всё же довольно нетрудной (м. б. профдеформация:), а №8 – трудной. Но там красивая идея зато:) В общем, пробуйте. Удачи!

$\boxed{7}$ В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

$\boxed{8}$ Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары $(a\,;\,x)$, при которых оно достигается.