

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике — 2022
Заключительный этап

11 класс

Задача 1. На тарелке лежат различные конфеты трёх видов: 2 леденца, 3 шоколадных и 5 мармеладных. Света последовательно все их съела, выбирая каждую следующую конфету наугад. Найдите вероятность того, что первая и последняя съеденные конфеты были одного вида.

Задача 2. В школьном турнире по крестикам-ноликам участвовали 16 учеников, каждый сыграл с каждым ровно одну игру. За победу давалось 5 очков, за ничью — 2 очка, за поражение — 0 очков. После завершения турнира выяснилось, что суммарно все участники набрали 550 очков. Какое наибольшее количество участников могло ни разу не сыграть вничью в этом турнире?

Задача 3. Натуральное число A назовём *интересным*, если существует натуральное число B такое, что:

- $A > B$;
- разность чисел A и B — простое число;
- произведение чисел A и B — точный квадрат.

Найдите все интересные числа, большие 200 и меньше 400.

Задача 4. Положительные числа a, b, c, d больше 1. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\log_a(ab^2) + \log_b(b^2c^3) + \log_c(c^5d^6) + \log_d(d^{35}a^{36}).$$

Задача 5. Точка P внутри остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle BAP = \angle CAP$. Точка M — середина стороны BC . Прямая MP пересекает описанные окружности треугольников ABP и ACP в точках D и E соответственно (точка P лежит между точками M и E , точка E лежит между точками P и D). Оказалось, что $DE = MP$. Докажите, что $BC = 2BP$.

Задача 6. Назовём функцию f *хорошей*, если

- f определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает действительные значения;
- для всех $x, y \in [0, 1]$ верно $|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

Найдите все хорошие функции.