

1.1 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ – правильная шестиугольная призма.

- а) Докажите, что F и C равноудалены от плоскости $BE D_1$.
- б) Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1 , если все рёбра призмы равны 1.

1.2 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что $AD : BC = 2 : 1$ и $AB = BC$.

- а) Докажите, что $DB_1 \perp A_1 B_1$.
- б) Найдите угол между прямыми CD_1 и DB_1 , если грань $ADD_1 A_1$ – квадрат.

2.1 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки EB и CK пересекаются в точке L .

- а) Докажите, что EL – медиана треугольника KCE .
- б) Найдите площадь треугольника LBC , если $BC : AD = 2 : 3$, а площадь трапеции $ABCD$ равна 100.

2.2 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , AB и AC в точках K , L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A .

- а) Докажите, что $AP \parallel BC$.
- б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q – точка пересечения прямых KM и AB , а T – такая точка на отрезке PQ , что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT .

3.1 [Добавка. «Ломоносов», 2015.5] Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1 : 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей α по окружности наименьшего радиуса.

3.2 [Добавка. ВОШ, регион, 11 класс, 2010] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

4.1 [Добавка. Czech-Polish-Slovak Match, 2020] $ABCD$ – параллелограмм, P – его центр. Пусть M – середина AB . Точка Q выбрана так, что QA касается описанной окружности треугольника MAD и QB касается описанной окружности треугольника MBC . Докажите, что Q , M и P лежат на одной прямой.

4.2 [Добавка. ВОШ, регион, 11 класс, 2010] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC . Точки K и M – проекции вершин A и C соответственно на прямую BD . Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P . Докажите, что $\angle KPM = 90^\circ$.