

1.1 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $10\sqrt{3}$, а боковое ребро равно $3\sqrt{10}$. На ребре AC отмечена точка E так, что $AE = \sqrt{3}$. Точки F и N – середины сторон A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость α параллельна прямой AB и содержит точки E и N .

а) Докажите, что прямая CF перпендикулярна плоскости α .

б) Найдите расстояние от точки F до плоскости α .

1.2 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и K – середины AD и CC_1 соответственно, точка T на ребре CD такова, что $CT : TD = 2 : 1$. Плоскость α проходит через M параллельно плоскости BKT .

а) Докажите, что $C_1 \in \alpha$.

б) Найдите расстояние между BKT и α , если параллелепипед прямоугольный, $BC = 3$, $CD = 6$ и $DD_1 = 8$.

2.1 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M , а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .

а) Докажите, что $2\angle BMN = \angle ACB$.

б) Найдите BM , если $AB = AC = 5$, $BC = 6$.

2.2 [Задача из материалов ЕГЭ. Оформляйте решение так, как требуется на экзамене.] Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC , у которого $\cos \angle B = 0,8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC , параллельной стороне AC .

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника ABC .

3.1 [Добавка. МФТИ, вступительный экзамен, 2001] Тело в форме правильного тетраэдра $ABCD$ поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F – середина ребра CD , точка S такова, что B – середина отрезка AS . В точку S сажают муравья. Найдите длину кратчайшего пути муравья из S в F , если ребро тетраэдра равно 1.

3.2 [Добавка. МФТИ, вступительный экзамен, 2001] $ABCD$ – правильная пирамида, ABC – основание, $AB = 8\sqrt{3}$, высота $DH = 6$. Точки A' , B' , C' – середины рёбер DA , DB , DC соответственно. Найдите радиус сферы, касающейся плоскости ABC и прямых AC' , CB' и BA' .

4. [Добавка. Asian Pacific MO, 2013] В остроугольном треугольнике центр описанной окружности соединили с вершинами и основаниями высот. Треугольник при этом разбился на шесть треугольников. Докажите, что среди их площадей не более трёх различных.