

Геометрия, 11 "В", домашнее задание на 22 декабря.

1 [ЕГЭ, тренировочный вариант. Требуется "ЕГЭшное" оформление!] Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $P$  делит  $BD_1$  в отношении  $D_1 P : PB = 2 : 1$ , точка  $Q$  — середина  $CB_1$ .

а) Докажите что одна из вершин параллелепипеда лежит на прямой  $PQ$ .

б) Найдите объём параллелепипеда, если известно, что он прямоугольный, а отрезок  $PQ$  равен расстоянию между прямыми  $BD_1$  и  $CB_1$  и равен  $\sqrt{2}$ .

2 Вычислите интегралы, преобразовав подынтегральное выражение или сделав подходящую замену переменной:

а)  $\int \sin^2 x \cos x dx$

б)  $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

в)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$

3 Приводя на лекции примеры вычисления определённого интеграла (площади под графиком), мы рассматривали только равномерное разбиение (делили отрезок на равные части) и в качестве  $\xi_i$  выбирали  $x_i$  (правый конец отрезка разбиения). В ряде случаев так делать действительно проще (или безразлично, как именно считать). Однако приведём два примера, когда подобный "прямолинейный" подход приводит к большим вычислительным трудностям, а выручает "хитрость".

а) Вычислите  $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$  ( $0 < a < b$ ). Разбиение сделайте равномерным, но значение функции

на отрезке  $\Delta X_i = [x_{i-1}; x_i]$  берите в точке  $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$  — среднем геометрическом концов. Убедитесь, что это гораздо проще, чем брать правый конец отрезка.

б) Вычислите  $\int_a^b x^{43} dx$  ( $0 < a < b$ ). Считайте значение в правом конце отрезка ( $\xi_i = x_i$ ),

но сами  $x_i$  выберите так, чтобы они образовывали геометрическую прогрессию. Убедитесь, что это гораздо проще, чем разбивать равномерно.

4\* Приведите пример многогранника, у которого любая диагональ короче любого ребра (при этом диагонали у него имеются).

5\* Центр описанной окружности треугольника лежит на его вписанной окружности. Докажите, что никакие две стороны этого треугольника не отличаются более чем вдвое.