

Геометрия, 11 "В", домашнее задание на 22 декабря.

1 [ЕГЭ, тренировочный вариант. Требуется "ЕГЭшное" оформление!] Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка P делит BD_1 в отношении $D_1 P : PB = 2 : 1$, точка Q — середина CB_1 .

а) Докажите что одна из вершин параллелепипеда лежит на прямой PQ .

б) Найдите объём параллелепипеда, если известно, что он прямоугольный, а отрезок PQ равен расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равен $\sqrt{2}$.

2 Вычислите интегралы, преобразовав подынтегральное выражение или сделав подходящую замену переменной:

а) $\int \sin^2 x \cos x dx$

б) $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$

3 Приводя на лекции примеры вычисления определённого интеграла (площади под графиком), мы рассматривали только равномерное разбиение (делили отрезок на равные части) и в качестве ξ_i выбирали x_i (правый конец отрезка разбиения). В ряде случаев так делать действительно проще (или безразлично, как именно считать). Однако приведём два примера, когда подобный "прямолинейный" подход приводит к большим вычислительным трудностям, а выручает "хитрость".

а) Вычислите $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$). Разбиение сделайте равномерным, но значение функции

на отрезке $\Delta X_i = [x_{i-1}; x_i]$ берите в точке $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ — среднем геометрическом концов. Убедитесь, что это гораздо проще, чем брать правый конец отрезка.

б) Вычислите $\int_a^b x^{43} dx$ ($0 < a < b$). Считайте значение в правом конце отрезка ($\xi_i = x_i$),

но сами x_i выберите так, чтобы они образовывали геометрическую прогрессию. Убедитесь, что это гораздо проще, чем разбивать равномерно.

4* Приведите пример многогранника, у которого любая диагональ короче любого ребра (при этом диагонали у него имеются).

5* Центр описанной окружности треугольника лежит на его вписанной окружности. Докажите, что никакие две стороны этого треугольника не отличаются более чем вдвое.