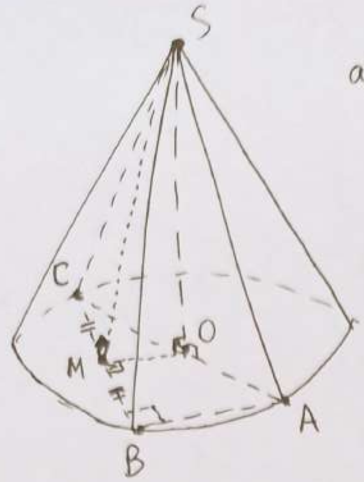
Задача № 1



а) Пусть O – середина AC – центр основания конуса. Так как M – середина хорды BC, $OM \perp BC$. Также $SC = SB$, поэтому $SM \perp BC$

[можно тут также сослаться на теорему о трёх перпендикулярах]

Поэтому $(SMO) \perp BC$, и MO – проекция SM на (ABC). Так что угол между (SM) и (ABC) это $\angle SMO$.

Далее, угол между (AB) и (SBC) равен углу между (OM) и (SBC), так как $OM \parallel AB$ по теореме о средней линии в $\triangle ABC$. Из сказанного выше следует, что (SM) – проекция (OM) на (SBC), поэтому угол между (OM) и (SBC) – это также $\angle SMO$. Утверждение доказано.

б) Если $AB = 6$ и $BC = 8$, то $AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ по теореме Пифагора в $\triangle ABC$ (в котором $\angle B = 90°$ как опирающийся на диаметр). Значит $OA = OC = 5$, а раз $SC = 5\sqrt{2}$, то и $SO = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5$ по теореме Пифагора в $\triangle SOA$.

Пусть φ – искомый угол. Если расстояние от A до (SBC) равно d, то $\sin\varphi = \frac{d}{AS} = \frac{d}{5\sqrt{2}}$. Осталось найти d. Заметим, что $AC = 2 \cdot OC$, поэтому расстояние от O до (SBC) равно $\frac{d}{2}$. Из сказанного ранее следует, что это расстояние – высота $\triangle$-ка SOM, опущенная на его гипотенузу SM.

То есть $$\frac{d}{2} = \frac{SO \cdot OM}{SM} = \frac{5 \cdot \frac{BA}{2}}{SM} = \frac{5 \cdot 3}{\sqrt{SB^2 - BM^2}} = \frac{5 \cdot 3}{\sqrt{50-16}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

(использованы ф-ла длины средней линии $\triangle$-ка и теорема Пифагора в $\triangle SMB$).

Итак, $d = \frac{30}{\sqrt{34}}$, $\sin\varphi = \frac{d}{5\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{34} \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$

Ответ: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$