Определенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница

Определение. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, и $x \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

Теорема Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неотрицательна и непрерывна. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Формула Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неотрицательна и непрерывна, $F(x)$ — ее первообразная на отрезке $[a, b]$. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху графиком функции $f(x)$, а с боков прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$, равна $F(b) - F(a)$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

10. Вычислите определенные интегралы. Начертите соответствующие криволинейные трапеции.

    а) $\int\limits_0^1 x^2 dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 (1 - x^2)dx$.

11. Найдите ошибку: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = -2$

Свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ *(при перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак)*

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

4а) $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$; 4б) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ *(линейность)*

12. Вычислите интеграл: а) $\int\limits_0^\pi \sin x dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^\pi \sin x dx$.

13. Вычислите интеграл $\int\limits_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}dx$ двумя способами: по формуле Ньютона-Лейбница и геометрически.

Вычисление площадей с помощью интеграла

14. Найдите площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

    а) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2$ и $x + y = 2$; д) $y = 2^x$, $y = 2$ и $x = 0$;
    б) $y = x^2 + 2x - 3$ и осью абсцисс; г) $y = \sin x$, $y = x - \pi$ и $x = 0$; е) $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

15. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-2x - x^2}dx$

16. Вычислите $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx$.

17. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 1 + \cos \pi x$ и $y = 2x^2 - 2$.

18. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ и касательной к графику функции $g(x)$ в его точке с абсциссой 16.

19. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 3|x| + x$ и касательными к нему, проходящими через точку $A\left(-\frac{5}{4}; -\frac{13}{2}\right)$.

20. При каком a прямая $y = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 3 - x^2 - 2x$, пополам?

21. Найдите площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a>0,\ b>0$.

22. * Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2+2xy+4y^2=1$.

Домашнее задание

23. Приведите пример неинтегрируемой функции, квадрат которой интегрируем.

24. В каком отношении парабола $y^2=2x$ делит площадь круга $x^2+y^2=8$?

25. Вычислите $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x^{2023}-1543x)\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

26. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{2}{(2x-1)^2}$, касательной к нему в точке с абсциссой $x_0=1$ и прямой $x=2$.

Замена и интегрирование по частям

<u>Теорема 1</u>. *Пусть* $u(x)$ *и* $v(x)$ *— непрерывно дифференцируемые на отрезке* $[a,\,b]$ *функции. Тогда* $\int\limits_a^b u\,dv=uv\,\big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du$.

27. Проинтегрируйте по частям: а) $\int\limits_0^{\pi}x\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^1\arccos x\,dx$.

<u>Теорема 2</u>. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\,b]$, *а функция* $x=\phi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha,\,\beta]$. *Пусть также все значения* $x=\phi(t)$ *при* $t\in[\alpha,\,\beta]$ *принадлежат отрезку* $[a,\,b]$; *в частности,* $\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=b$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

28. Можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$ положить $x=\sin t$?

29. Можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ положить $x=\sin t$? Можно ли в качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$? Подтвердите свое мнение вычислением.

30. Проинтегрируйте с помощью замены переменной: а) $\int\limits_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

31. Вычислите следующие определенные интегралы

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}x\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^1\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; д) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$; г) $\int\limits_0^{0{,}75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; е) $\int\limits_{-1}^1\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

32. Объясните, почему неверны следующие замены:

а) $t=x^{\frac{2}{3}}$ в интеграле $\int\limits_{-1}^1 dx$; б) $x=\frac{1}{t}$ в интеграле $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}$.

33. Объясните, почему неверна замена $t=\operatorname{tg}x$ в интеграле $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

34. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\int\limits_{-2}^{x}\frac{\sin\frac{\pi t}{4}}{t^2+2}dt$ в точке графика с абсциссой $x_0=2$.

35. Найдите минимумы функции $f(x)=\int\limits_0^x(2\cos^2 t-\sin 2t)dt$ на отрезке $[0;\,\pi]$.

36. Вычислите с помощью определенных интегралов следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}$.

37. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$.