Неопределенный интеграл

Определение. ***Первообразной*** *для данной функции $f(x)$, заданной на некотором промежутке, называется функция $F(x)$, заданная на том же промежутке, производная которой равна $f(x)$.*

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют ***неопределенным интегралом*** *этой функции и обозначают $\int f(x)dx$.*

Таблица основных интегралов

$\boxed{1}$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;

$\boxed{2}$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\boxed{3}$ $\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\boxed{4}$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; $\boxed{5}$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

$\boxed{6}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; $\boxed{7}$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

$\boxed{8}$ $\int e^x dx = e^x + C$; $\boxed{9}$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

$\boxed{10}$ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

Свойства неопределённого интеграла. Замена переменной

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Интеграл суммы равен сумме интегралов, если они существуют.

3) Линейная замена переменной.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + \mathrm{C}$.

$\boxed{11}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$; $\boxed{13}$ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

$\boxed{12}$ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$; $\boxed{14}$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

4) Произвольная замена переменной.

Теорема. Пусть $t = g(x)$ дифференцируема на промежутке X, и $\int f(t)dt = F(t) + C$ на образе этого промежутка $g(X)$. Тогда $\int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + \mathrm{C}$.

Для интегрирования функций, содержащих $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ применяют тригонометрические замены:

$x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$); $x = a\operatorname{tg} t$ (или $x = a\operatorname{ctg} t$); $x = \frac{a}{\sin t}$ (или $x = \frac{a}{\cos t}$).

$\boxed{15}$ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \mathrm{C}$; $\boxed{16}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

Из работы 23 марта 2012г., вар.1

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x}}$; 3) $\int \frac{dx}{7x^2-2}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; 6) $\int \frac{2^x5^x}{25^x-4^x}dx$; 7) $\int \frac{x+2}{\sqrt[5]{(x-2)\sqrt{x-2}}}dx$; 8) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$; 9) $\int \frac{x^3dx}{x^8+2}$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$; 11) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$. 12) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+9x^2}}$.

Задачи

1. а) Найдите первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0;+\infty)$, принимающую значение 1 при $x = 1$.

   б) Как изменится ответ, если упустить условие "на промежутке $(0;+\infty)$"?
2. Функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) = (x+5)\ln(7-x)$ и $g(x) = (x-2)\ln(x+4)$ соответственно. Сравните $F(2)$ и $G(4)$, если $F(3) = G(3)$.
3. Проинтегрируйте: а) $\int \operatorname{tg} x dx$; б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; в) $\int x(1-x)^{10}dx$; г) $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

Интегрирование по частям

$$\int \boldsymbol{u}d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} - \int \boldsymbol{v}d\boldsymbol{u}$$

При интегрировании произведения многочлена и тригонометрической функции удобно принимать многочлен за $\boldsymbol{u}$, а тригонометрическую функцию за $\boldsymbol{v}$.

4. Проинтегрируйте: а) $\int x \sin x dx$; б) $\int x^2 \sin x dx$; в)* $\int x \sin \sqrt{x} dx$.

При интегрировании произведения многочлена обратной тригонометрической функции поступают наоборот: принимают многочлен за $\boldsymbol{v}$, а обратную тригонометрическую функцию за $\boldsymbol{u}$.

5. Проинтегрируйте: а) $\int x \operatorname{arctg} x dx$; б) $\int \arcsin x dx$.

Вообще, за $\boldsymbol{u}$ принимают функцию, у которой производная проще самой функции (например, $\ln x$). А $d\boldsymbol{v}$ должно "хорошо"интегрироваться.

6. Проинтегрируйте: а) $\int x^3 \ln x dx$; б) $\int \ln x dx$; в) $\int e^x(2x^2 + x + 1)dx$;
г) $\int e^x \cos x dx$; д) $\int x^5 e^{x^3} dx$.

Добавка

7. Проинтегрируйте: а) $\int \frac{dx}{\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$; в) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}dx$; г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

8. Проинтегрируйте:

а) $\int \ln^2 x dx$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; в) $\int e^{2x} \sin 2x dx$; г) $\int \sin x \ln(\cos x)dx$.
д) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; е) $\int \arcsin^2 x dx$; ж) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; з) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
и) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$; к) $\int e^{2x} \sin^2 x dx$.

9. Для функции $f(x) = -\sin 6x \cos 4x$ найдите первообразную, наибольшее значение которой равно 4.