Второй замечательный предел и его следствия

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Теорема об одновременном переходе к пределу.
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

119. Как изменится теорема об одновременном переходе к пределу, если A и/или B заменить на ∞?
120. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

121. а) Укажите промежутки непрерывности функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; б) Доопределите эту функции по непрерывности в нуле; в) Докажите первое следствие из первого замечательного предела.

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

122. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \log_2(1+x)$, $y = \log_3(1+x)$ и $y = x$.
123. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

124. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$.

Домашнее задание

125. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)^{\frac{1}{x-1}}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{x-\dfrac{\pi}{4}}$.

Школа 1543 *11-В класс* *Алгебра и математический анализ-5* *8 декабря 2022 г.*

Второй замечательный предел и его следствия

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Теорема об одновременном переходе к пределу.
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

119. Как изменится теорема об одновременном переходе к пределу, если A и/или B заменить на ∞?
120. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

121. а) Укажите промежутки непрерывности функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; б) Доопределите эту функции по непрерывности в нуле; в) Докажите первое следствие из первого замечательного предела.

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

122. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \log_2(1+x)$, $y = \log_3(1+x)$ и $y = x$.
123. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

124. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$.

Домашнее задание

125. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)^{\frac{1}{x-1}}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{x-\dfrac{\pi}{4}}$.