

Логарифмические неравенства

Логарифмические неравенства с постоянным основанием

88. Решите неравенство: а) $\log_{\frac{1}{3}} 2 \cos x < -\frac{1}{2}$; б) $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$.
89. Решите неравенство: а) $\log_5(3x - 2) \geq \log_5(6 - 5x)$;
 б) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}}(5 - x) < 1$; в) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$.
90. Решите неравенство:
 а) $0,2 \frac{6 \log_4 x - 3}{\log_4 x} > \sqrt[3]{0,008^2 \log_4 x - 1}$; б) $5^{2 \log_5^2 x} - 4x^{\log_5 x} \geq 5$.

Логарифмические неравенства с переменной в основании

91. Решите неравенство $\log_{2x-3} x > 1$.
92. Решите неравенство:
 а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$; б) $\log_{|x-1|} 0,5 > 0,5$; в) $\log_x \frac{3}{2} < \log_x \frac{2}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}$.

Домашнее задание

93. Решите неравенство:
 а) $5^{\log_3 \left(\frac{x-2}{x}\right)} < 1$; д) $\log_5(x - 3) + \frac{1}{2} \log_5 3 < \frac{1}{2} \log_5(2x^2 - 6x + 7)$;
 б) $\frac{4 \log_{0,3} x + 1}{\log_{0,3} x + 1} \leq \log_{0,3} x + 1$; е) $4 \log_2 x + \log_2 \frac{x^2}{8(x-1)} \leq 4 - \log_2(x - 1) - \log_2^2 x$.
 в) $\log_3(2 \sin x) \leq \frac{1}{2}$; ж) $\log_{x^2-1}(3x - 1) < \log_{x^2-1} x^2$;
 г) $\log_{x-1}(x + 2) \leq 0$; з) $x^{\log_{0,5} x + 4} < 0,5^4 x$.
94. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$.

Переход от логарифмических неравенств к рациональным

95. Решите неравенство $\log_{2x-1} 3 > \log_x 9$ двумя способами: а) методом интервалов;
 б) пользуясь тем, что $\log_a b$ имеет тот же знак, что и $b - 1$.
Вообще, $\log_a b$ имеет тот же знак, что и $b - 1$ при $a > 1$ и противоположный при $0 < a < 1$ (если он вообще существует :)

96. Решите неравенство:
 а) $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 5)}{x^3 - 5x^2 + 4x} \leq 0$; б) $\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x < 2$.

Если переменная находится и под знаком логарифма, и в его основании, удобен переход:

$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0 \\ f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \neq 1 \end{cases}$$

97. Решите неравенство:
 а) $\log_x \left(\frac{3}{8 - 2x}\right) \geq -2$; б) $\log_{8x^2 - 0,5}(\log_{0,5} x) < 0$.
98. * А если кому-то все это слишком легко, пусть решит такое неравенство:

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0$$

Домашнее задание

99. Решите неравенство:
 а) $\log_{x+2} 4 > \log_x 2$; в) $\log_x(x + 1) < \log_{\frac{1}{x}}(2 - x)$;
 б) $\frac{\log_3(1 - 2x - x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x + 1 + \sqrt{2})} \geq 0$; г) $\log_{2x}(x - 4) \cdot \log_{x-1}(6 - x) < 0$.
100. Сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{16^x} = \log_{\frac{1}{16}} x$?

Обобщённый метод интервалов

101. Решите неравенство $\lg \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| > 0$.
102. Решите обобщенным методом интервалов: $\frac{\sqrt{2x+1}}{2 + \log_{0,5}(x+1)} * 0$, если знак * означает: а) $>$; б) \geq ; в) $<$; г) \leq .

103. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\log_{0,3} |x-2|}{x^2-4x} < 0; & \quad \text{б) } \frac{\log_{2x}(5x-1) \log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0; \\ \text{в) } \frac{\log_2 |x|(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x} \leq 0; & \quad \text{г) } \frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leq 1. \end{aligned}$$

И вот - свобода!..

104. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{3^x-25}{x+1} \leq \frac{3^x-25}{x-3}; & \quad \text{б) } \log_{2x} \left(\log_3 \frac{x+1}{x-1} \right) < \log_{\frac{1}{2x}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1} \right); \\ \text{в) } \sqrt{6-x}(2 \cdot 9^{2x} - 53 \cdot 3^{2x} - 27) \geq 0; & \quad \text{г) } \frac{\sqrt{2-x^2+2x+x-2}}{\log_3 \left(\frac{5}{2} - x \right) + \log_3 2} \leq 0. \end{aligned}$$

105. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_{\sin^2 x} 10 > \log_{\cos^2 x} 10; & \quad \text{г) } \log_{0,5}(x-3) - \log_{0,5}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0; \\ \text{б) } \frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2}; & \quad \text{д) } \log_2(2x) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}; \\ \text{в) } \log_5 x + \log_x \left(\frac{x}{3} \right) < \frac{(2-\log_3 x) \log_5 x}{\log_3 x}; & \quad \text{е) } \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} < 0. \end{aligned}$$

106. Решите неравенство (С-3 из сборника ЕГЭ-2011):

$$\begin{aligned} \text{а) } \left(x + \frac{8}{x} \right) \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4) \right| \geq 9 \cdot \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4) \right|; & \quad \text{б) } \sqrt{4 \sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \frac{x-5}{2x-1} \geq 0; \\ \text{в) } \log_{\text{tg } x} \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < -1; & \quad \text{г) } 11^{-|x-1|} \cdot \log_5(4+2x-x^2) \geq 1. \end{aligned}$$

107. Решите неравенство $\left(\frac{4x^2}{x^4+1} \right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2} \right)^{x-2}$.

108. Решите неравенство $\log_3 \left(\left(\sqrt{7+\sqrt{48}} \right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^x \right) \geq \log_3 \left(\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^x + 1 \right) + 1$.

109. Найдите произведение корней уравнения $2^{|\log_2 x|} = 3$.

110. Решите уравнение: а) $\log_3(3^x-8) = 2-x$; б) $\log_2 x \cdot \log_2(x-3) + 1 = \log_2(x^2-3x)$.

111. Решите неравенство: а) $\left(\frac{1}{2} \right)^{\log_3(1-x)} \geq 0,25$; б) $x \cdot 3^{\log_x 4} > 12$.

112. Решите неравенства: а) $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3) < 2x-1$.

Указание. Ответ можно получить с помощью графиков. Но график — не доказательство, надо сослаться на свойства функций.

113. Решите неравенства:

$$\text{а) } \left| x - 4^{1+\sqrt{3-x}} \right| \leq \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}; \quad \text{б) } \frac{1}{x} \sqrt{10x-8-2x^2} - \left(\sqrt{x^2-5x+4} + \frac{1}{2} \right) \cdot \log_5 \frac{x}{16} \leq 1$$

114. Найдите все тройки целых чисел x, y, z , удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) + \log_2(2y+4z-5x+2) > z^2 - 9z + 17.$$

Домашнее задание

115. Решите обобщенным методом интервалов: $\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{8-2x-x^2}} * 0$, если * означает: а) $>$; б) \geq ; в) $<$; г) \leq .

116. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_{\frac{3x}{x^2+1}}(x^2-2, 5x+1) \geq 0; & \quad \text{г) } \sqrt{9^x-3^{x+2}} > 3^x-9; \\ \text{б) } (x^2-5x+3) \lg \left(1 - \frac{x}{3} \right) \geq \lg \frac{3}{3-x}; & \quad \text{д) } \frac{2x^2-7x+3}{\log_2 |x-1|} \geq 0; \\ \text{в) } \frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}; & \quad \text{е) } \log_x(\log_3(9^x-6)) \geq 1. \end{aligned}$$

117. Решите систему (С-3 из пробного варианта ЕГЭ-2012):

$$\begin{cases} 7 \log_9(x^2-x-6) \leq 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3} \\ \frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} < 52 \end{cases}$$

118. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } (2^x-3^x) \log_x(x^2-5x+7) > 0; & \quad \text{г) } \log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5(x^2-9) < 0; \\ \text{б) } \frac{\sqrt{3^{2x+1}-4 \cdot 3^x+1}}{x^2-x-6} \leq 0; & \quad \text{д) } 4^{\sin^2 x} < \frac{12}{4^{\sin^2 x-1}}; \\ \text{в) } \frac{2+\log_3 x}{x-1} < \frac{6}{2x-1}; & \quad \text{е) } x \cdot 10^{\log_x 11} < 110. \end{aligned}$$