

## Логарифм и его свойства

### Определение логарифма. Логарифмическая функция

Показательные уравнения из предыдущего листка чудесным образом имели рациональные решения. А всегда ли имеет решение уравнение  $a^x = b$ ?

*Определение.* Показатель степени  $x$ , в которую надо возвести основание  $a$ , чтобы получить число  $b$ , называется **логарифмом числа  $b > 0$  по основанию  $a$** . То есть  $\log_a b = x$  означает, что  $a^x = b$ .

19. Пользуясь только определением логарифма, вычислите: а)  $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$ ; б)  $\log_6 \sqrt[6]{6}$ .

Дать объекту определение — еще не значит убедиться в его существовании. Для каких  $a$  и  $b$  существует  $\log_a b$ ?

*Определение.* Функция, обратная к показательной функции  $y = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , называется **логарифмической** и обозначается  $y = \log_a x$ .

Вместо  $\log_e x$  принято писать  $\ln x$ , а вместо  $\log_{10} x$  пишут  $\lg x$ .

20. Постройте в одной системе координат графики функций:

а)  $y = \log_2 x$  и  $y = \log_5 x$ ; б)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  и  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ .

Из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции вытекает, что функция  $y = \log_a x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , определена для всех  $x > 0$  и является на этом множестве непрерывной и монотонной (возрастающей при  $a > 1$  и убывающей при  $0 < a < 1$ ).

21. Сравните: а)  $\log_3 \frac{1}{5}$  и  $\log_3 \frac{1}{6}$ ; б)  $\log_{\frac{1}{3}} 5$  и  $\log_{\frac{1}{3}} 6$ .

22. а) Решите уравнение  $3^x = 5$ ; б) Решите неравенства  $3^x > 5$ ,  $(0,3)^x > 5$ .

*Основное логарифмическое тождество.*  $a^{\log_a c} = c$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $c > 0$ .

23. Постройте график функции: а)  $y = 2^{\log_2 x}$ ; б)  $y = x^{\log_x 2}$ .

24. Вычислите  $9^{\log_3 5}$ .

### Арифметические свойства логарифмов

*Теорема о логарифме произведения.*  $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .

*Следствие.*  $\log_a b^n = n \log_a b$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Теорема о логарифме частного.*  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .

25. Вычислите: а)  $\log_2 27 - 2 \log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$ ; б)  $\frac{2}{11} (\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 7^{\log_7 4})^2 \log_5 11$ .

26. Постройте график функции: а)  $y = \log_2 x^2$ ; б)  $y = \log_2 x^3$ .

27. Найдите  $x$ , если  $\lg x^2 = 4 \lg 3 + 2 \lg 6 - \lg 9$ .

*Теорема о логарифме степени.*  $\log_a b^n = \frac{n}{k} \log_a b$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $k \neq 0$ .

*Следствие.*  $\log_a b^k = \log_a b$  при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $k \neq 0$ .

28. Вычислите  $\log_4 8$ .

29. Вычислите:

а)  $(3 \lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$ ; б)  $\log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{125} 9^3$ ; в)  $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} + \log_{0,2} \sqrt[3]{5}$ ;  
 г)  $8^{\log_4 3 - \log_{16} 729}$ ; д)  $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256}$ .

30. Постройте график функции: а)  $y = -\log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{3} - x \right) + \log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$ ; б)  $y = 0,5 \log_2 \sin^2 x$ .

31. Решите уравнения:

а)  $4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{2+\lg x^2} = 0$ ; б)  $(2 \cdot 3^x + 5^x) \cdot (3^{x+1} + 2 \cdot 5^x) = 15^{x+1}$ .

32. Решите неравенства:

а)  $\sqrt{0,8^{x(x-3)}} < 0,64$ ; б)  $\sqrt{\pi^x - \frac{5}{4}} \geq 10 - \pi^x$ ; в)  $\frac{2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3}}{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x} < 1$ .

33. \* Решите уравнение  $a \cdot 12^{|x|} = 2 - 12^{-|x|}$ .

Домашнее задание

34. Решите уравнение: а)  $\lg x = \frac{2}{3} \lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3} \lg 3$ ; б)  $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$ .

35. Постройте график функции:

а)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x)$ ; б)  $y = 0,5^{\log_{0,5}(1-x^2)}$ ; в)  $y = 2^{|\log_{0,5} x|}$ ; г)  $y = \log_2 \log_2 x$ .

36. Вычислите:

а)  $\log_4 \sqrt[3]{32}$ ; б)  $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}}$ ; в)  $\log_5 75 + 3 \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3}$ ; г)  $\frac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3} \log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}} 150}$ .

37. Решите уравнения:

а)  $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6 \cdot 3^{2-x}$ ; г)  $2 \cdot 15^x - 3^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 90 = 0$ ;  
 б)  $9^{\sqrt{x}+0,5} - 39 \cdot 3^{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$ ; д)  $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$ .  
 в)  $\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$ ;

38. Решите неравенство

а)  $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$ ; в)  $\sqrt{24,75 - 3^x} \geq 3^x - 9$ ;  
 б)  $6^{x+2} \geq 4 \cdot 7^{|x+1|}$ ; г)  $\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^{2x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{x-3}$ .

39. Докажите, что для любой показательной функции  $f(x) = a^x$  и любой геометрической прогрессии  $b_1, b_2, b_3, \dots$  с положительными членами найдется такая арифметическая прогрессия  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , что для всех  $n$  будет  $f(x_n) = b_n$ .

Логарифмирование. Свойства логарифмов с разными основаниями

40. Зная, что  $0,3 < \lg 2 < 0,302$ , найдите количество знаков в десятичной записи числа  $2^{100}$ .

41. Решите уравнения: а)  $7^{x+3} \cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}} = 1$ ; б)  $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$ ; в)  $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$ .

42. Докажите формулу  $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$ .

Следствие 1 (формула перехода к другому основанию).  $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$ .

Следствие 2.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  при  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ .

43. Пользуясь формулой перехода, вычислите логарифмы: а)  $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$ ; б)  $\log_6 \sqrt[6]{6} \sqrt[4]{6}$ .

44. Вычислите: а)  $2^{\log \sqrt[3]{6^2}}$ ; б)  $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$ .

Формула "обмена этажами".  $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

45. а) Вычислите  $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$ ; б) Вычислите еще раз  $9^{\log_3 5}$ .

46. Вычислите:

а)  $5^{\frac{2 \log_4 5 + 1}{2 \log_4 5}}$ ; г)  $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$ ; д)  $10^{\frac{\log_2 3 \cdot \log_5 3}{\log_2 3 + \log_5 3}}$ ;  
 б)  $(3\sqrt{3})^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2\sqrt[3]{2})}$ ; е)\*  $4^{\log_{0,25} 0,1} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{12 + 2\sqrt{35}}$ ;  
 в)  $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 16 \cdot \log_2 3)$ ; ж)\*  $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2 \log_{28} 7) \log_7 2 - \log_2 7$ .

47. Упростите выражение:

а)  $\frac{2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a} - 3^{\log_{27}(a^2+1)^3} - 2a}{7^{\log_{49} a^4} - 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{a}} - 1}$ ; б)  $a\sqrt{\log_a b} - b\sqrt{\log_b a}$ .

48. Пусть  $\log_a 27 = b$ . Найдите  $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ .

49. Пусть  $\ln 2 = a$ ,  $\log_2 7 = b$ . Найдите  $\ln 56$ .

50. Пусть  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_5 3 = b$ ,  $\log_7 3 = c$ . Выразите  $\log_{140} 9$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

51. Пусть  $\log_{12} 18 = a$ ,  $\log_{24} 54 = b$ . Докажите, что  $ab + 5(a - b) = 1$ .

52. Пусть  $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$ ,  $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ . Докажите, что тогда  $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$ .

53. \* Вычислите  $15 \lg_x(x - 1)$ , если  $x^3 - 4x^2 + 3x = 1$ .

54. Сравните: а)  $\log_5 \sqrt{2}$  и  $\log_{25} 3$ ; б)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$  и  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ ; в)  $\log_3 10 + 4 \lg 3$  и  $4$ .

55. а) Докажите, что при  $a > 1$  выполняется неравенство  $\log_a(a + 1) > \log_{a+1}(a + 2)$ .  
б) Сравните  $\log_{17} 19$  и  $\log_{19} 20$ .

56. Сравните  $\log_{135} 675$  и  $\log_{45} 75$ .

### Домашнее задание

57. Решите уравнение: а)  $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$  б)  $9 \cdot 12^{\sqrt{x}} = 6^x$ .

58. Прологарифмируйте равенство по основанию 10:  $x = \frac{\sqrt[3]{100\sqrt{10a\sqrt[3]{0,1a^2}}}}{10\sqrt{0,1a}}$ .

59. Постройте график функции  $y = x^{\frac{\log_2 \log_2 x}{\log_2 x}}$ .

60. Вычислите:

а)  $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$ ; г)  $\frac{\log_7 5 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 4 + 2 \log_4 2}{2(2 \log_3 2 + 3 \log_{343} 7)}$ ;

б)  $\frac{\log_5 12 - 2 \log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0,5}$ ; д)  $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;

в)  $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$ ; е)  $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ)$ .

61. Найдите значение выражения  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ .

62. Решите уравнение: а)  $\log_x 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}$ ; б)  $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x) \lg \frac{5}{3}$ ;

в)  $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 1,5$ ; г)  $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9 \log_6 8$ .

63. Пусть  $\lg 5 = a$ ,  $\lg 3 = b$ . Выразите  $\log_{30} 8$  через  $a$  и  $b$ .

64. Пусть  $\log_7 2 = a$ ,  $\log_3 2 = b$ . Найдите  $\log_{63} 4$ .

65. Пусть  $\log_{ab} a = n$ . Найдите  $\log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$ .

66. Сравните: а)  $\log_2 \frac{1}{7}$  и  $\log_3 \frac{1}{7}$ ; б)  $\log_5 130$  и  $\log_3 25$ .

67. Сравните: а)  $\log_2 3 + \log_3 2$  и  $\log_5 5\sqrt{5}$ ; б)  $\log_7 10$  и  $\log_{11} 13$ ; в)  $5^{\log_3 7} + \sqrt{7}$  и  $7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3} \log_7 19}$ .

68. Упростите выражение  $a^{\frac{2}{\log_b a} + 1} \cdot b - 2a^{1+\log_a b} \cdot b^{1+\log_b a} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b} + 1}$ .

69. Дано:  $a^2 + b^2 = 7ab$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Докажите, что  $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$ .

70. Вычислите: а)  $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$ ;

б)  $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$ .