

## Интегрирование рациональных дробей

Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$85) \int \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Любой многочлен можно представить в виде произведения линейных и неразложимых квадратичных множителей.

Определение. Элементарными рациональными дробями называются дроби четырех типов (дискриминанты знаменателей дробей третьего и четвертого типа отрицательны):

$$\text{I)} \frac{A}{ax + b}; \quad \text{II)} \frac{A}{(ax + b)^n}; \quad \text{III)} \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}; \quad \text{IV)} \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Интегрирование элементарных дробей первого и второго типа

86) Проинтегрируйте в общем виде элементарные дроби первых двух типов.

87) а) Является ли элементарной дробь  $\frac{3x+1}{5-x}$ ? Найдите  $\int \frac{3x+1}{5-x} dx$ ;

б) Является ли элементарной дробь  $\frac{3x-5}{x^2-5x+6}$ ? Найдите  $\int \frac{3x-5}{x^2-5x+6} dx$

88) Разложите в сумму элементарных дробей дробь  $\frac{x+1}{x^3-3x^2+2x}$  двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и "методом поочередного домножения". Найдите  $\int \frac{x+1}{x^3-3x^2+2x} dx$ .

89)  $\int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx$ ; 90)  $\int \frac{dx}{(x+4)(x-3)(x-1)}$ .

91) Разложите в сумму элементарных дробей дробь  $\frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}$ . Найдите  $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$ .

92)  $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)}$ .

Интегрирование элементарных дробей третьего типа

93)  $\int \frac{dx}{x^2+2x+3} dx$ ; 94)  $\int \frac{x dx}{x^2+2x+5} dx$ ; 95)  $\int \frac{x dx}{x^3+1}$ .

Замена переменной

96)  $\int \frac{(x^4-3)dx}{x(x^8+3x^4+2)}$ ; 97)\*  $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx$ ; 98)  $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$ .

Для повторения

99)  $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ ; 100)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ; 101)  $\int x^2 \arccos x dx$ ; 102)  $\int x^2 e^{-2x} dx$ ;

103)  $\int \frac{x^3+2x^2+4x-3}{x-2} dx$ ; 104)  $\int \frac{3}{2x-1} dx$ ; 105)  $\int \frac{3}{(2x-1)^5} dx$ ; 106)  $\int \frac{x-4}{x^2+5x-6} dx$ ;

107)  $\int \frac{x dx}{(x^2-4)(x^2-9)}$ ; 108)  $\int \frac{15x^2-4x-81}{x^3-13x+12} dx$ ; 109)  $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+5x-6)^2}$ ; 110)  $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$ .