Показательная функция

Степень с действительным показателем

Попробуем понять, что такое $\mathbf{1{,}41^{\sqrt{2}}}$. А что такое $\sqrt{2}$? Неотрицательное число, квадрат которого равен $\mathbf{2}$. А откуда следует, что такое число существует? Из аксиомы полноты: это разделяющее число множества M положительных чисел, квадрат которых меньше $\mathbf{2}$ и множества B положительных чисел, квадрат которых больше $\mathbf{2}$. Единственность разделяющего числа следует из того, что найдутся $m \in M$ и $b \in B$, сколь угодно близкие друг к другу. Степень с положительным основанием и действительным показателем определим по тому же плану:

Определение. *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множества $M = \{a^m | m \in \mathbb{Q}, m < x\}$ и $B = \{a^b | b \in \mathbb{Q}, b > x\}$. Разделяющее число множеств M и B называется* ***степенью a^x***.

Корректность определения доказана в курсе 10 класса. Тогда же доказано, что основные свойства степени с рациональным показателем выполняются и для степени с действительным показателем.

Определение и свойства показательной функции

Определение. *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция $y = a^x$, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$, называется* ***показательной.***

Согласно определению степени с действительным показателем, $1^x = 1$ для всех действительных x. Поэтому рассматривать показательную функцию при $a = 1$ незачем.

Свойства показательной функции:

1) График показательной функции проходит через точку $(0;\, 1)$.
2) При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает на $\mathbb{R}$.
3) Функция $y = a^x$ непрерывна в каждой точке числовой оси.
4) Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел.

1. Постройте график функции: а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; в) $y = 3^x$.
   Докажите, что они равны как геометрические фигуры.
2. Сравните числа: а) $(\sqrt{2})^{-0,3}$ и $(\sqrt{2})^{-0,2}$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{e}$; в) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.
3. Как по графику функции $y = c \cdot a^x$ определить основание a и коэффициент c?
4. Постройте график функции: а) $y = 2^{1-x}$; б) $y = -0,2^{|x+2|}$; в) $y = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$;
   г) $y = |2^x + 1| + |2^x - 1|$.
5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = -\frac{4}{x+2}$.
6. Решите неравенство $|x - 1| \geqslant 2,5^x$.
7. Найдите наибольшее целочисленное значение функции $y = 10^{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x + 0,5}$

Показательные уравнения

Так как показательная функция монотонна, то для всех $a > 0$, $a \neq 1$ верен переход

$$\left(a^{f(x)} = a^{g(x)}\right) \Leftrightarrow (f(x) = g(x))$$

8. Решите уравнение:
   а) $25^{3-2x} = \frac{1}{125} \cdot (25\sqrt{5})^{-x}$; б) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$; в) $4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x = 0$.
9. Решите уравнение:
   а) $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$;
   б) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} = 12$;
   в) $\frac{2^x}{5^{x-1}} + 3 = \frac{5^x}{2^{x-1}}$;
   г) $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$;
   д) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$;
   е) $7^{x+3} - 7^{x+2} - 2^{x+5} + 2 \cdot 0,25^{-(1+0,5x)} = 0$;
   ж) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;
   з) $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$;
   и) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$;
   к) $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$;
   л) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

10. Решите уравнение:

а) $(x-3)^{\frac{x+1}{4}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$; б) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$; в) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

11. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2\cdot 4^x+1}{2^x+2} - 4^x = \dfrac{y}{2^{x+1}+4} \\ 4\cdot 2^{3x} + y^2 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2y = 1 \end{cases}$

Показательные неравенства

Для всех $a > 1$ верен переход $\left(a^{f(x)} > a^{g(x)}\right) \Leftrightarrow (f(x) > g(x))$.

Для всех $0 < a < 1$ верен переход $\left(a^{f(x)} > a^{g(x)}\right) \Leftrightarrow (f(x) < g(x))$.

$$\left(f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ (f(x)-1)(g(x)-h(x)) > 0 \end{cases}$$

12. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} > 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$;

б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

в) $\dfrac{15-16^{x+1}}{4^{2x}-4} \geqslant 2^{4x+1} - 3$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} + 15\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 4 < 0$;

д) $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5\cdot 6^{-\frac{1}{x}} < 4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;

е) $(x^2-x+1)^x < 1$;

ж) $(x^2-4x+4)^{x^2-x-6} \geqslant 1$;

з) $f\left(g(x)\right) < g\left(f(x)\right)$, где $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$.

13. * На доске в ряд в некотором порядке выписаны несколько степеней двойки. Для каждой пары соседних чисел Петя записал в тетрадку степень, в которую нужно возвести левое число, чтобы получилось правое. Первым в ряду на доске шло число 2, а последним — число 1024. Вася утверждает, что этого достаточно, чтобы найти произведение всех чисел в тетрадке. Прав ли Вася?

14. * Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что степень a^b — число рациональное?

Домашнее задание

15. Решите уравнение:

а) $3^{x-1}\cdot 2^{x+1} + 2^{x-1}\cdot 3^x = \frac{7}{36}$;

б) $4^x - 3\cdot 2^{x+2} = 64$;

в) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

г) $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$;

д) $9\cdot 5^x + 15\cdot 3^{x-1} = 15^x + 45$;

е) $25^{1-\cos 6x} = 5^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$;

ж) $3^x + 3^{2-x} = 3\cdot(1+\cos 2\pi x)$;

з) $|\cos x|^{\sin^2 x - 1,5\sin x + 0,5} = 1$.

16. Решите неравенство:

а) $4^{\sqrt{9-x^2}+1} + 2 < 9\cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$;

б) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

в) $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$;

г) $5\cdot 9^x - 18\cdot 15^x + 9\cdot 25^x > 0$;

д) $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2+x+1)^3$;

е) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} \leqslant 1$.

Добавка

17. * Решите в положительных числах систему $\begin{cases} x^y = z \\ y^z = x \\ z^x = y \end{cases}$

18. * Известно, что $a > 0$, а неравенство $10 < a^x < 100$ имеет ровно пять решений в натуральных числах. Сколько таких решений может иметь неравенство $100 < a^x < 1000$? *(Тургор-2005/2006)*