Геометрия, 10 «В», домашнее задание 13 $\longrightarrow$ 19 мая.

В самостоятельной работе Андрей написал, что в каркасном тетраэдре биссектрисы двух граней, проведённые к их общему ребру, попадают в одну и ту же точку. Это не так, но зато теперь можно на это опереться, составляя домашнее задание. :))

Назовём тетраэдр ***гармоничным***, если для каждой пары его противоположных рёбер произведение их длин одинаково.

$\boxed{1}$ Докажите, что в гармоничном тетраэдре биссектрисы двух граней, проведённые к общему ребру, попадают в одну точку.

$\boxed{2}$ Докажите, что в гармоничном тетраэдре отрезки, соединяющие вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней, проходят через одну точку.

$\boxed{3}$ Докажите, что если тетраэдр удовлетворяет условию, указанному в предыдущей задаче, то он гармоничный.

$\boxed{4}$ Пусть $ABCD$ — гармоничный тетраэдр, а точки B, C и D лежат на сфере Ω. Пусть прямые AB, AC, AD вторично пересекают Ω в точках B', C', D'. Докажите, что треугольник $B'C'D'$ равносторонний. *(Вспомните доказательство неравенства Птолемея. Само оно не поможет, а техника решения – вполне.)*

$\boxed{5}$ Правильный тетраэдр со стороной основания 6 и боковым ребром 4 является каркасным, поэтому существует сфера, касающаяся его рёбер. Найдите её радиус.

$\boxed{6}$ В ортоцентрическом тетраэдре $ABCD$ H – ортоцентр, R – радиус описанной сферы. Докажите, что $AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2 = 4R^2$.

$\boxed{7}$ [Задача из материалов для подготовки к ЕГЭ.] Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается её боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.
а) Докажите, что $AD = 3BC$.
б) Найдите MN, если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

$\boxed{8^*}$ [*Необязательное задание. Планиметрия – олимпиадная задача.* Баян.] Точка I – инцентр треугольника ABC, точка A_1 – эксцентр (центр вневписанной окружности), противолежащий вершине A, M – середина AC, $K = A_1M \cap BC$. Докажите, что $KI || AC$.