Геометрия, 10 «В», домашнее задание 06 $\longrightarrow$ 12 мая.

$\boxed{1}$ Докажите, что в прямоугольном тетраэдре выполняется своеобразная «теорема Пифагора для площадей»: если S_i – площади прямоугольных граней, а S – площадь остроугольной грани, то $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$.

$\boxed{2}$ Докажите, что если в прямоугольном тетраэдре длины рёбер, выходящих из прямого угла, равны a, b, c, а высота равна h, то $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

$\boxed{3}$Лучи $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ попарно перпендикулярны, а луч $[OD)$ составляет с ними острые углы α, β и γ соответственно. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Эти косинусы называют «направляющими косинусами» для луча $[OD)$.

$\boxed{4}$ В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABD = \angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \angle ABC = \beta$ и $AB = CD$. Найдите угол между гранями ABC и ABD.

$\boxed{5}$ Известно, что середины всех рёбер тетраэдра лежат на одной сфере. Докажите, что он ортоцентрический.

$\boxed{6}$ [*МГУ, ДВИ, 2022*] Все плоские углы при вершине A тетраэдра $ABCD$ прямые. Двугранные углы при рёбрах BD и CD равны между собой и вдвое больше двугранного угла при ребре BC. Найдите объём тетраэдра, если $AD = 1$.

$\boxed{7}$ [Задача из материалов для подготовки к ЕГЭ.] В треугольник ABC, в котором $AC < BC$, вписана окружность с центром O. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CO.
а) Докажите, что точки A, B, O и B_1 лежат на одной окружности..
б) Найдите площадь четырёхугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

$\boxed{8^*}$ [*Необязательное задание. Планиметрия – олимпиадная задача.* Харьков, отборочная олимпиада.] $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AB = CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Описанная окружность треугольника ADO вторично пересекает боковую сторону DC в точке P. Точка Q на отрезке AP такова, что $QB||DC$. Докажите, что O – центр описанной окружности треугольника BCQ.