

Геометрия, 10 «В», домашнее задание 29 → 05 мая.

Напомним, что мы обсуждаем теорему:

Теорема. Следующие свойства тетраэдра эквивалентны:

- 1) он ортоцентрический;
- 2) противоположные ребра попарно перпендикулярны;
- 3) каждая его вершина проектируется в ортоцентр противоположащей грани;
- 4) равны его бимедианы;
- 5) коробка является ромбоидом;
- 6) равны суммы квадратов длин противоположащих ребер;
- 7) углы между противоположащими ребрами равны между собой;

На уроке мы установили эквивалентность 2,4,5,6. И вывели 1 из 2

1] Какие тетраэдры одновременно и равногранные и ортоцентрические?

2] Докажите, что из (2) следует (5) в более слабом исходном предположении: если даже только две пары противоположных ребер перпендикулярны, то...

3] Докажите, что у ортоцентрического тетраэдра общие перпендикуляры к скрещивающимся ребрам пересекаются в одной точке (ортоцентре).

4] (Продолжение.) А вот обратное неверно: приведите пример неортоцентрического тетраэдра, у которого общие перпендикуляры к скрещивающимся ребрам пересекаются в одной точке.

5] Докажите, что в любом тетраэдре  $ABCD$  верно равенство  $\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0$ .

6] Пользуясь без доказательства неравенством Птолемея для тетраэдра (в любом тетраэдре  $ABCD$  верно неравенство  $DA \cdot BC < DC \cdot AB + DB \cdot AC$ ), докажите (7)  $\Rightarrow$  (1).

7] [Задача из материалов для подготовки к ЕГЭ.] В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $CC_1$  и медиану  $AA_1$ . Оказалось, что точки  $A, A_1, C, C_1$  лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AA_1 : CC_1 = 5 : 4$  и  $A_1C_1 = 4$ .

8\*] [Необязательное задание. Планиметрия – олимпиадная задача. Европейская олимпиада для девушек, 2023, упрощение.] Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ , проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $D$ . Точки  $P$  и  $Q$  – проекции  $D$  на прямые  $AC$  и  $BC$ . Докажите, что середина стороны  $AB$  – ортоцентр треугольника  $PQC$ .